BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7

MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung

Numerik II

(Sommersemester 2000)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1:

V sei der (reelle) Vektorraum der 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Für $n = 2r,\ m = 2k$ mit $r, k \in \mathbb{N}$ und $r \leq k$ seien die Funktionen $v_j \in V,\ j = 0, \ldots, n,$ und die linearen Funktionale $l_i : V \to \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, m,$ durch

$$v_0(x) := \frac{1}{2}\ ,\ v_{2l-1}(x) := \cos(l\,x)\ ,\ v_{2l}(x) := \sin(l\,x)\ ,\ l = 1, \ldots, r,$$

$$l_i(v) := v(x_i) \ \text{ mit } \ x_i := \frac{i}{m+1}\,2\pi\ ,\ i = 0, \ldots, m,$$

gegeben. Zeigen Sie:

a) Für die (Gramsche) Matrix $G := (l_i(v_j))_{\substack{i=0,\ldots,m \\ j=0,\ldots,n}}$ gilt:

(i) $G^\top G = \text{diag}\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+1}{2}, \ldots, \frac{m+1}{2}\right)$.
(ii) Die Spalten von G sind linear unabhängig (d.h. $\text{rang(G)} = \text{n} + 1$).

b) Definiert man zu $c = (c_0, \ldots, c_m)^\top \in \mathbb{R}^{m+1}$

$$\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)^\top := \frac{2}{m+1}\,\text{diag}(2, 1, \ldots, 1)G^\top c\ , \tag{L}$$

so gilt für

$$p : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{l=1}^{r} \lambda_{2l-1}\cos(l\,x) + \lambda_{2l}\sin(l\,x)\ :$$

$$\sum_{i=0}^{m} (p(x_i) - c_i)^2 < \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{l=1}^{r} \alpha_{2l-1}\cos(l\,x_i) + \alpha_{2l}\sin(l\,x_i) - c_i\right)^2$$
$$\forall \alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{\lambda\}\ .$$

Im Fall $n = m$ ist $p(x_i) = c_i,\ i = 0, \ldots, m.$

Aufgabe 2:

Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von λ aus (L) und bestimmen Sie damit λ für $n = 8$ und $n = 12$ zu $c_i := \sin^2\left(\frac{i}{13}\,2\pi\right),\ i = 0, \ldots, 12\ (= m).$

Berechnen Sie jeweils (für das zu λ gehörige p) $p(x_i) - c_i,\ i = 0, \ldots, 12.$ Was fällt auf, und wie ist es zu erklären?

Aufgabe 3:

Es sei $h > 0,\ \xi_j := \xi_0 + jh,\ j = -2, -1, 0, 1, 2, 3,$ und f eine auf $\mathbb{R}$ definierte reellwertige, hinreichend oft differenzierbare Funktion. Dann ist (z.B.)

$\alpha := p'_{f(\xi_{-1},\xi_0,\xi_1)}(\xi_0)$ eine Approximation von $f'(\xi_0)$,
$\beta := p''_{f(\xi_{-2},\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\xi_2)}(\xi_0)$ eine Approximation von $f''(\xi_0)$,
$\gamma := p'''_{f(\xi_{-2},\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\xi_2)}(\xi_0)$ eine Approximation von $f'''(\xi_0)$ und
$\delta := p''''_{f(\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}(\xi_0)$ eine Approximation von $f''''(\xi_0)$.

a) Stellen Sie $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ in Abhängigkeit von h und $f(\xi_{-2}), \ldots, f(\xi_3)$ dar.

b) Berechnen Sie zu $h := 2^{-\nu},\ \nu = 1, \ldots, 10$ und $\xi_0 := 0$

(i) α für $f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \exp(x) \quad (f'(0) = 1),$
(ii) β und δ für $f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \ln\left(1 + x^2\right) \quad (f''(0) = 2,\ f''''(0) = -12)$ und
(iii) γ für $f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \sinh(x) \quad (f'''(0) = 1).$

Aufgabe 4:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig (oder auch nur Riemann-integrierbar). Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$
\begin{aligned}
h_n &:= \frac{b-a}{n}\,, \\
x_i^{(n)} &:= a + ih_n,\ i = 0,\ldots,n, \\
m_i^{(n)} &:= \frac{x_{i-1}^{(n)} + x_i^{(n)}}{2} = x_{2i-1}^{(2n)},\ i = 1,\ldots,n, \\
Tt_n(f) &:= h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(m_i^{(n)}\right)\,, \\
St_n(f) &:= h_n \sum_{i=1}^{n} \frac{f\left(x_{i-1}^{(n)}\right) + f\left(x_i^{(n)}\right)}{2}\,, \\
Si_n(f) &:= h_n \sum_{i=1}^{n} \frac{f\left(x_{i-1}^{(n)}\right) + 4f\left(m_i^{(n)}\right) + f\left(x_i^{(n)}\right)}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie:

a) (i) Bezeichnet T eine Treppenfunktion bezüglich der Knoten $x_0^{(n)},\ldots,x_n^{(n)}$, die f an den Stellen $m_i^{(n)}, i = 1,\ldots,n$, interpoliert, so ist $\int_a^b T(\xi)d\xi = Tt_n(f)$.

(ii) Ist f differenzierbar und $L : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$L(x) = f\left(m_i^{(n)}\right) + f'\left(m_i^{(n)}\right)\left(x - m_i^{(n)}\right)\ \forall x \in]x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}[,\ i = 1,\ldots,n,$$

so gilt ebenfalls $\int_a^b L(\xi)d\xi = Tt_n(f)$.

($Tt_n(f)$ heißt daher auch n-te *Tangententrapez-Summe* für f)

b) Bezeichnet $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ die polygonale Funktion bezüglich der Knoten $x_0^{(n)},\ldots,x_n^{(n)}$, die f in diesen Knoten interpoliert, so ist $\int_a^b p(\xi)d\xi = St_n(f)$.

($St_n(f)$ heißt daher auch n-te *Sehnentrapez-Summe* für f)

c) Bezeichnet $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte (stetige, i.a. aber nicht differenzierbare) Funktion mit der Eigenschaft, daß für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ die Funktion $q|\left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$ Einschränkung eines Polynoms vom Grad ≤ 2 ist, das f in $x_{i-1}^{(n)},\ m_i^{(n)},\ x_i^{(n)}$ interpoliert, dann gilt $\int_a^b q(\xi)d\xi = Si_n(f)$.

($Si_n(f)$ heißt n-te *Simpson-Summe* für f)

d) $St_{2n}(f) = \frac{Tt_n(f)+St_n(f)}{2}$ und $Si_n(f) = \frac{2Tt_n(f)+St_n(f)}{3}$.

e) $\lim_{n\to\infty} Tt_n(f) = \lim_{n\to\infty} St_n(f) = \lim_{n\to\infty} Si_n(f) = \int_a^b f(\xi)d\xi$.

Anleitung: Stellen sie fest, daß $Tt_n(f),\ St_n(f)$ und $Si_n(f)$ Riemann-Summen sind!

f) Programmieren Sie einen auf d) aufbauenden Algorithmus zur Berechnung von $Si_{2^j}(f),\ j = 0,1,\ldots$.
Bestimmen Sie damit $Si_{(2^8)}(f)$ für

$$
\begin{aligned}
&f : [1,2] \ni x \longmapsto \frac{1}{x}\,, \\
&f : [0,1] \ni x \longmapsto \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \text{ und} \\
&f : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \ni x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}\,.
\end{aligned}
$$

Anleitung: Man berechne $St_1(f),\ Tt_1(f),\ Si_1(f) = \frac{2Tt_1(f)+St_1(f)}{3}$. Liegen $St_{2^{j-1}}(f),\ Tt_{2^{j-1}}(f),\ Si_{2^{j-1}}(f)$ vor, so berechne man $St_{2^j}(f) = \frac{Tt_{2^{j-1}}(f)+St_{2^{j-1}}(f)}{2}$, $Tt_{2^j}(f)$ (wie definiert!) und $Si_{2^j}(f) = \frac{2Tt_{2^j}(f)+St_{2^j}(f)}{3}$.

Abgabetermin: Donnerstag, 6. Juli 2000, in der Vorlesung