BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7

MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung

Numerik I

(Wintersemester 1999/2000)

Klausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Mindestpunktzahl: 24 (von 40 erreichbaren)

Aufgabe 1: (2 Punkte)

v bezeichne den Vorgänger, n den Nachfolger von 10^{13} in $R(10, 13, -98, 100)$.

Bestimmen Sie $10^{13} - v$ und $n - 10^{13}$.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß die tridiagonale Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

der Bedingung (V_{LR}) genügt.

Berechnen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren $x := A^{-1}(12, -14, 12)^\top$.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

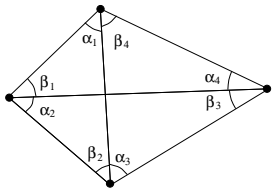
Ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

positiv definit? Besitzt A eine LR-Zerlegung?

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Für die in der Skizze angegebenen Winkel seien die Meßwerte (in Alt-Grad) α_{i_0} für α_i , β_{i_0} für β_i , $i = 1, 2, 3, 4,$ gegeben.



Beschreiben Sie, wie die Verbesserungen $\Delta\alpha_i,\ \Delta\beta_i,\ i = 1, 2, 3, 4,$ zu berechnen sind, damit sie die Bedingungen

(i) $(\alpha_{1_0} + \Delta\alpha_1) + (\beta_{1_0} + \Delta\beta_1) + (\alpha_{2_0} + \Delta\alpha_2) + (\beta_{2_0} + \Delta\beta_2) = 180$,

(ii) $(\alpha_{2_0} + \Delta\alpha_2) + (\beta_{2_0} + \Delta\beta_2) + (\alpha_{3_0} + \Delta\alpha_3) + (\beta_{3_0} + \Delta\beta_3) = 180$,

(iii) $(\alpha_{3_0} + \Delta\alpha_3) + (\beta_{3_0} + \Delta\beta_3) + (\alpha_{4_0} + \Delta\alpha_4) + (\beta_{4_0} + \Delta\beta_4) = 180$

erfüllen und dabei

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\Delta\alpha_i^2 + \Delta\beta_i^2\right)$$

minimal ist.

Warum nimmt man zu den Bedingungen (i), (ii), (iii) nicht die ebenfalls zu erfüllenden Bedingungen

(iv) $(\alpha_{4_0} + \Delta\alpha_4) + (\beta_{4_0} + \Delta\beta_4) + (\alpha_{1_0} + \Delta\alpha_1) + (\beta_{1_0} + \Delta\beta_1) = 180$ und

(v) $\sum\limits_{i=1}^{4} ((\alpha_{i_0} + \Delta\alpha_i) + (\beta_{i_0} + \Delta\beta_i)) = 360$

hinzu?

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Bestimmen Sie für

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) eine LDR-Zerlegung,

b) die Summen $\pi(A)$ und $\nu(A)$ der Vielfachheiten der positiven bzw. negativen Eigenwerte von A.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Schätzen Sie für

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$|\det A|$ nach oben ab. Ist A regulär?

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Zu

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

berechne man $\|A\|_i$, $i = 1, 2, \infty, G, F,$ und den Spektralradius $\varrho(A)$.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Formen Sie die Differenz

$$1 - \cos(x)$$

so um, daß (für betragskleine x) Auslöschung vermieden wird.

Aufgabe 9: (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$T : [1, \infty[\ni x \longmapsto 2 - e^{-x}$$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Schätzen Sie die Abweichung von $T(1.84)$ vom eindeutig bestimmten Fixpunkt $\hat{x}$ von T ab.

(*Rundungsfehler brauchen nicht berücksichtigt werden!*)

Aufgabe 10: (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x - \cos(x + y) &= 0 \\ 6y - \sin(x - y) &= 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung $(\hat{x}, \hat{y})^\top \in \mathbb{R}^2$ hat.

Lösungen ohne erkennbaren Lösungsweg werden nicht akzeptiert!

Viel Erfolg!!!