BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung
Numerik I
(Wintersemester 1999/2000)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ erfülle die Bedingung (V_{LR}). Dann gibt es (wie in der Vorlesung gezeigt wurde) zu vorgegebenen $d_i \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, $i = 1,\ldots,n$, eine reguläre untere Dreiecksmatrix $L = (l_{ij})_{i,j=1}^{n}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R = (r_{ij})_{i,j=1}^{n}$ mit $r_{ii} = d_i$, $i = 1,\ldots,n$, und $LR = A$.

Zeigen Sie, daß L und R eindeutig bestimmt sind und mit dem folgenden (nach *Crout* benannten) Algorithmus berechnet werden können:

$$l_{\nu 1} := a_{\nu 1}/d_1\ ,\ \nu = 1,\ldots,n,$$
$$r_{1j} := a_{1j}/l_{11}\ ,\ j = 2,\ldots,n,$$

$$\text{und für}\ \ i = 2,\ldots,n:$$
$$l_{\nu i} := (a_{\nu i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{\nu k} r_{ki})/d_i\ ,\ \nu = i,\ldots,n,$$
$$r_{ij} := (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj})/l_{ii}\ ,\ j = i+1,\ldots,n,\ \text{falls}\ i < n\ .$$

Wenden Sie den Algorithmus zu der Vorgabe $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 4$ auf

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 28 & 32 & 40 \\ 5 & 41 & 58 & 77 \\ 9 & 75 & 114 & 154 \\ 10 & 86 & 149 & 211 \end{pmatrix}$$

an. (Daß A die Bedingung (V_{LR}) erfüllt, folgt aus der Durchführbarkeit des Algorithmus und $l_{44} \neq 0$!)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ keine Cholesky-Zerlegung besitzt, wenn sie nicht positiv definit ist.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie: Die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenschaft (V_{LR}), ist aber nicht positiv definit.

Nach Aufgabe 2 besitzt A daher keine Cholesky-Zerlegung. A besitzt aber (genau) eine LDL^T-Zerlegung.

Berechnen Sie Näherungen für L und D.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, daß die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist, und bestimmen Sie die Choleskyzerlegung von A.

Aufgabe 5:

Für einen Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ b \in \mathbb{R}^{n}$$

bezeichne $\mathrm{tfo}(n)$ die Anzahl aller durchzuführenden arithmetischen Operationen $(+, -, \cdot, /)$.

Bestimmen Sie $\mathrm{tfo}(n)$ für

a) das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Diagonalpivotwahl,

b) das auf tridiagonales A spezialisierte Gaußsche Eliminationsverfahren mit Diagonalpivotwahl,

c) den für symmetrisches A (das (V_{LR}) erfüllt) konzipierten Algorithmus, bei dem die LDL^T-Zerlegung von A berechnet wird,

d) den für symmetrisches, positiv definites A konzipierten Algorithmus, bei dem die Cholesky-Zerlegung von A berechnet wird. (Bei diesem Algorithmus spielen natürlich neben den erforderlichen arithmetischen Operationen auch die n Wurzeloperationen eine Rolle!)

Abgabetermin: Donnerstag, 16. Dezember 1999, in der Vorlesung