BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung
Numerik I
(Wintersemester 1999/2000)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, daß die tridiagonale Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

der Bedingung (V_{LR}) genügt.

Bestimmen Sie mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren

$$x \in \mathbb{R}^4 \ : \ Ax = \begin{pmatrix} 13 \\ -18 \\ 18 \\ -13 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie:

Für

$$p : [0,1] \ni x \longmapsto \frac{x+1}{e^x - 1} ,$$
$$q : [0,1] \ni x \longmapsto \frac{x}{e^x - x}$$

und

$$f : [0,1] \ni x \longmapsto x - 1$$

ist

$$v : [0,1] \ni x \longmapsto e^x - x$$

Lösung des *Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems*

$$\text{Gesucht: } v \in C^2[0,1] \ : \ \left\{ \begin{array}{c} -(pv')' + qv = f \\ v(0) = 1 \\ v(1) = e - 1 \end{array} \right\}$$

b) Berechnen Sie für dieses Randwertproblem mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren zu $n = 7$ und $n = 15$ die Näherungen v_i für $v\left(\frac{i}{n+1}\right)$ und die Differenzen $v_i - v\left(\frac{i}{n+1}\right),\ i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3:

Zu $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$ und $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sei

$$J := \left\{ f \in C^2[a,b] \,|f(x_i) = c_i,\ i = 0,1,2 \right\} .$$

a) Zeigen Sie, daß es in J genau ein Polynom q vom Grad ≤ 2 gibt.

b) Geben Sie eine explizite Darstellung für die Funktion $s \in J$ an, für die gilt:

$$\int_a^b s''(x)^2 dx = \min_{f \in J} \int_a^b f''(x)^2 dx .$$

c) Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür an, daß $s = q$ gilt.

d) Stellen Sie s und q für

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.625,\ x_2 = 1,\ c_0 = 1,\ c_2 = 1.5 \text{ und}$$
$$c_1 = 0.75,\ 1.0,\ 1.25,\ 1.3125,\ 1.5,\ 1.75$$

graphisch dar.

Bemerkung: Zur Berechnung des Wertes w eines Polynoms

$$\begin{aligned} p : x \longmapsto & a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ = & (\ldots((a_m x + a_{m-1})x + a_{m-2})x + \ldots + a_1)x + a_0 \end{aligned}$$

an einer vorgegebenen Stelle x_0 verwendet man den *Horneralgorithmus*:

$w := a_m$;
`for` $k := m-1$ `downto 0 do` $w := w \cdot x_0 + a_k$;

Aufgabe 4:

Berechnen Sie zu

$$a = x_0 = 0.0,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.2,\ x_3 = 0.4,$$
$$x_4 = 0.6,\ x_5 = 0.8,\ x_6 = 0.9,\ b = x_7 = 1.0$$

und

$$c_0 = 0.05,\ c_1 = 0.07,\ c_2 = 0.12,\ c_3 = 0.32,$$
$$c_4 = 0.35,\ c_5 = 0.15,\ c_6 = 0.08,\ c_7 = 0.06$$

die eindeutig bestimmte (kubische Spline-)Funktion

$$s \in J := \left\{ f \in C^2[a,b] \,|f(x_i) = c_i,\ i = 0,\ldots,7 \right\} ,$$

für die gilt:

$$\int_a^b s''(x)^2 dx = \min_{f \in J} \int_a^b f''(x)^2 dx .$$

Abgabetermin: Donnerstag, 9. Dezember 1999, in der Vorlesung