BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung
Numerik I
(Wintersemester 1999/2000)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

a) Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ gelte $Ax = 0$ und $|x_i| = \max\limits_{j=1}^{n} |x_j|$ $(=: \|x\|_\infty)$.

Zeigen Sie, daß dann $|a_{ii}| \leq \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ gilt.

b) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei eine Matrix mit überwiegender Diagonale (d.h. $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, \ldots, n$).

Beweisen oder widerlegen Sie:

- A ist regulär,
- Jede Hauptabschnittsmatrix von A hat überwiegende Diagonale,
- A genügt der Bedingung (V_{LR}),
- $\bar{A}^T$ hat überwiegende Diagonale,
- $\bar{A}^T$ genügt der Bedingung (V_{LR}).

Aufgabe 2:

a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei hermitesch und positiv definit.

Zeigen Sie:

1. Jede Hauptabschnittsmatrix von A ist hermitesch und positiv definit,
2. $\Delta_i(A) > 0,\ i = 1, \ldots, n$ (was insbesondere bedeutet, daß A die Eigenschaft (V_{LR}) hat).

Anleitung: Aus der Linearen Algebra sollte bekannt sein, daß A positive Eigenwerte hat und die Determinante einer Matrix das Produkt ihrer Eigenwerte ist.

b) Zeigen Sie durch Induktion über n, daß eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann positiv definit ist, wenn $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : \Delta_i(A) > 0$ gilt.

Aufgabe 3:

Für ein quadratisches Polynom

$$p : \mathbb{R} \ni t \longmapsto at^2 + bt + c$$

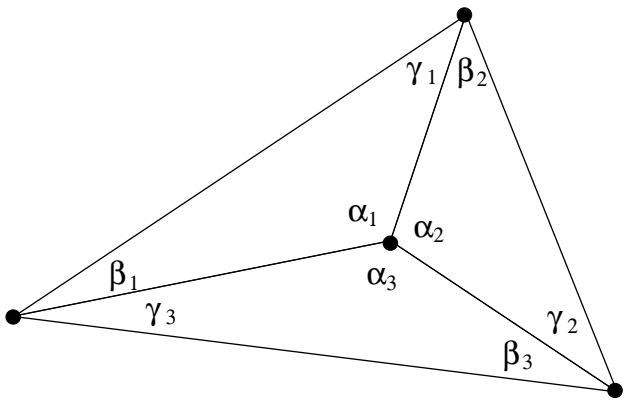
mit unbekannten Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ seien folgende Meßwerte w_t für $p(t)$ gegeben:

$$w_{-2} = 6.1\ ,\ w_{-1} = 1.9\ ,\ w_0 = -0.1\ ,\ w_1 = 0.0\ ,\ w_2 = 2.0\ .$$

Berechnen Sie Näherungen für Koeffizienten a, b, c, für die $\sum\limits_{i=-2}^{2} \left(ai^2 + bi + c - w_i\right)^2$ minimal wird.

Aufgabe 4:

Für die in der Skizze angegebenen Winkel $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i,\ i = 1, 2, 3,$



mögen die in der folgenden Tabelle angegebenen Meßwerte vorliegen:

Winkel	**Meßwert in Alt-Grad***
α_1	$\alpha_{1_0} = 120.4$
β_1	$\beta_{1_0} = 22.1$
γ_1	$\gamma_{1_0} = 37.9$
α_2	$\alpha_{2_0} = 105.1$
β_2	$\beta_{2_0} = 40.7$
γ_2	$\gamma_{2_0} = 34.0$
α_3	$\alpha_{3_0} = 135.0$
β_3	$\beta_{3_0} = 26.7$
γ_3	$\gamma_{3_0} = 18.2$

Berechnen Sie $\Delta\alpha_i, \Delta\beta_i, \Delta\gamma_i,\ i = 1, 2, 3,$ derart, daß

$$(\alpha_{i_0} + \Delta\alpha_i) + (\beta_{i_0} + \Delta\beta_i) + (\gamma_{i_0} + \Delta\gamma_i) = 180\ ,\ i = 1, 2, 3,$$
$$(\alpha_{1_0} + \Delta\alpha_1) + (\alpha_{2_0} + \Delta\alpha_2) + (\alpha_{3_0} + \Delta\alpha_3) = 360$$

und

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\Delta\alpha_i^2 + \Delta\beta_i^2 + \Delta\gamma_i^2\right)$$

minimal ist.

*) Die Winkelsumme im Dreieck ist 180 Alt-Grad!

Abgabetermin: Donnerstag, 2.12.1999, in der Vorlesung