BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

*Fachbereich 7*
**MATHEMATIK**

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung
**Numerik I**
(Wintersemester 1999/2000)

**Übungsblatt 13**

**Aufgabe 1:**

Führen Sie mit

$$A := \begin{pmatrix} 12 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -23 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 14 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix},\ b := \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -22 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix},\ x_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je 10 Iterationsschritte des Gesamtschrittverfahrens und des Einzelschrittverfahrens durch.

Schätzen Sie für die jeweils erhaltene Näherung $\tilde{x}$ von $x := A^{-1}b$ den Fehler $\|x - \tilde{x}\|_\infty$ ab.

**Aufgabe 2:**

$x_0 := (0.828, 3.849)^\top$ ist Näherung einer Nullstelle von

$$f : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 - x_1 \sin x_2 \\ (x_1 + x_2)\sin x_2 - 4\cos x_2 \end{pmatrix}.$$

Wenden Sie auf $x_0$ zwei Newton-Schritte an.

Zeigen Sie, daß $f$ im Rechteck $([0.827, 0.829], [3.848, 3.850])^\top$ genau eine Nullstelle $\hat{x}$ besitzt.

Versuchen Sie, eine bessere Einschließung für $\hat{x}$ zu berechnen.

*Anleitung:* Modifizieren Sie `m_a2bl13.p` und `m_a2bl13.dat`.

**Aufgabe 3:**

Es seien

$$x^1 := \begin{pmatrix} 212.793 \\ 268.667 \\ 72.540 \end{pmatrix},\ x^2 := \begin{pmatrix} 816.338 \\ 790.162 \\ 69.325 \end{pmatrix},\ x^3 := \begin{pmatrix} 1220.119 \\ 148.485 \\ 70.716 \end{pmatrix}$$

die Koordinatenvektoren dreier Punkte $P_1, P_2, P_3$ eines dreidimensionalen euklidischen Punktraumes $\mathbb{E}$ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $S$ von $\mathbb{E}$.
Zu einem weiteren Punkt $P \in \mathbb{E}$, dessen Koordinatenvektor bezüglich $S$ mit $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^\top$ bezeichnet werde, seien die Abstände

$$\begin{aligned} |P_1P| &= \left\|\hat{x} - x^1\right\|_2 = 672.185 =: s_1\ , \\ |P_2P| &= \left\|\hat{x} - x^2\right\|_2 = 394.343 =: s_2\ , \\ |P_3P| &= \left\|\hat{x} - x^3\right\|_2 = 429.348 =: s_3 \end{aligned}$$

gemessen worden.

Programmieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung von $\hat{x}$ als Nullstelle von

$$f : \mathbb{R}^3 \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} \left\|x - x^1\right\|_2^2 - s_1^2 \\ \left\|x - x^2\right\|_2^2 - s_2^2 \\ \left\|x - x^3\right\|_2^2 - s_3^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $x$ ist $Jf(x)$ regulär?

Untersuchen Sie das Verhalten der Newton-Iterierten für verschiedene Start-Koordinatenvektoren, die zu Punkten auf beiden Seiten der durch $P_1,\ P_2,\ P_3$ aufgespannten Ebene gehören.
Welche Vermutung drängt sich dabei auf?

**Aufgabe 4:**

$M$ sei ein metrischer Raum bezüglich $d$,

$$K_r(x) := \{y \in M | d(y,x) \leq r\} \quad \forall\, r \geq 0,\ x \in M\ .$$

$\hat{x} \in M$ sei Fixpunkt von $T : M \to M$, und mit einem $\delta > 0$ und einem $\gamma \in [0,1[$ gelte

$$d(T(x), \hat{x}) \leq \gamma\, d(x, \hat{x}) \quad \forall\, x \in K_\delta(\hat{x})\ .$$

Zeigen Sie:

Es gibt $\epsilon, \rho > 0$ , so daß für jedes $x_0 \in K_\epsilon(\hat{x})$ gilt:

(i) $K_\rho(x_0) \subset K_\delta(\hat{x})$ ,
(ii) $T(K_\rho(x_0)) \subset K_\rho(x_0)$ .

*Anleitung:* Versuchen Sie es mit $\epsilon := \frac{\delta}{2}(1-\gamma)$ und $\rho := \frac{\delta}{2}(1+\gamma)$.)

***Hinweis:*** Dieses Übungsblatt wird nicht mehr in den Übungen besprochen!