BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung
Numerik I
(Wintersemester 1999/2000)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1:

Schreiben Sie

- eine PASCAL-XSC-Funktion `maxnorm`, die für einen als Parameter übergebenen Intervallvektor `iv` ein Intervall `maxnorm(iv)` zurückgibt, das alle $\|v\|_\infty$ mit $v \in$ `iv` enthält,
- eine PASCAL-XSC-Funktion `zs_norm`, die für eine als Parameter übergebene quadratische Intervallmatrix `iA` ein Intervall `zs_norm(iA)` zurückgibt, das alle $\|A\|_\infty$ mit $A \in$ `iA` enthält.

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktionen für

$$A := \begin{pmatrix} 2.000 & 1.010 & 2.520 \\ 0.400 & 0.203 & -1.800 \\ 0.600 & -1.050 & 0.800 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 0.274 & 0.553 & 0.374 \\ 0.224 & -0.0141 & -0.741 \\ 0.090 & -0.434 & 0.000 \end{pmatrix}$$

eine Maschinenzahl ϵ mit $\|I - BA\|_\infty \leq \epsilon$.

Schätzen Sie im Fall $\epsilon < 1$ folgende Größen nach oben ab:

$$\frac{\|B - A^{-1}\|_\infty}{\|A^{-1}\|_\infty} \ , \ \|A^{-1}\|_\infty \ ,$$

die Kondition von A bezüglich $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

sowie für $b := \begin{pmatrix} 1.010 \\ 2.430 \\ -0.147 \end{pmatrix}$ und $\tilde{x} := \begin{pmatrix} 1.565 \\ 0.301 \\ -0.964 \end{pmatrix}$ (als Näherung für $x := A^{-1}b$) :

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty \text{ und } \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \ .$$

Aufgabe 2:

a) A, X_0 seien reelle oder komplexe $(m \times m)$–Matrizen mit $\|I - AX_0\| \leq \gamma < 1$, wobei $\|\cdot\|$ eine Matrixnorm bezeichne. Zeigen Sie, daß die durch

$$X_{k+1} := X_k \, (2I - AX_k) \ , \ k = 1, 2, \ldots$$

definierte Folge gegen A^{-1} konvergiert. (*Anleitung:* Schätzen Sie $\|I - AX_k\|, \ k = 1, 2, \ldots$ ab.)

b) Berechnen Sie zu

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ und } X_0 := \begin{pmatrix} 24.8 & -41.1 & 10 & -6 \\ -41.1 & 68.5 & -17.2 & 10 \\ 10 & -17.2 & 5.1 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

X_{10} und $I - AX_{10}$.

Aufgabe 3:

Ist die Abbildung

$$f : [1, \infty[\ni x \longmapsto x + \frac{1}{x} \in [1, \infty[$$

kontrahierend?

Gilt

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall\, x, y \in [1, \infty[\quad ?$$

Hat f einen Fixpunkt?

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, daß das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - \sin(x + y) &= 0 \\ 4y - \cos(x - y) &= 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$ hat.

Berechnen Sie eine Näherung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$ mit

$$\max\{|x - \hat{x}|, |y - \hat{y}|\} < 10^{-5} .$$

Aufgabe 5:

$\|\cdot\|$ sei eine Matrixnorm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gelte $\|I - A\| =: \gamma < 1$.

Zeigen Sie:

a) Die auf $K := \{Y \in \mathbb{K}^{n\times n} : \|Y\| \le \gamma\}$ definierte Abbildung

$$T : K \ni X \longmapsto \frac{1}{2}(X^2 + I - A)$$

bildet K in sich ab, ist kontrahierend mit der Kontraktionskonstanten γ und besitzt genau einen Fixpunkt Z.

b) Für alle $X_0 \in K$ (z.B. $X_0 = 0$, $X_0 = I - A$) ist Z Grenzwert der durch

$$X_i := \frac{1}{2}(X_{i-1}^2 + I - A) \ , i = 1, 2, \ldots$$

definierten Matrizenfolge.

c) $W := I - Z$ ist die eindeutig bestimmte Quadratwurzel von A (d.h. $W^2 = A$) mit der Eigenschaft

$$\|I - W\| \le \|I - A\| .$$

.

Abgabetermin: Donnerstag, 3. Februar 2000, in der Vorlesung