BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung
Numerik I
(Wintersemester 1999/2000)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1:

Mit Hilfe des Householder-Verfahrens kann man zu gegebenen linear unabhängigen $a^1, \ldots, a^n \in \mathbb{R}^m$ im Fall $n < m$ eine Orthonormalbasis von $\big(\text{span}(a^1, \ldots, a^n)\big)^\perp$ bestimmen.

Schreiben Sie ein entsprechendes PASCAL-XSC-Programm.

Wenden Sie es auf die (hoffentlich l. u.) Spalten $a^1, \ldots, a^4$ der folgenden Matrix an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Anleitung: Man kann dazu die Prozedur `H_QR` im Programm `hqr_test.p` verwenden.

Aufgabe 2:

Die über ein $x \in \mathbb{R}$ vorliegende Information sei $x \in [i, s]$ mit bekannten Maschinenzahlen $i, s : \ i \leq s$ und $0 \notin [i, s]$. Für eine Approximation ξ von x ist dann

$$\text{rf}(\xi) := \max \left\{ \left| \frac{\xi - \eta}{\eta} \right| \ : \ \eta \in [i, s] \right\}$$

der (bei der vorliegenden Information) maximal mögliche Betrag des relativen Fehlers.

Für welches ξ wird $\text{rf}(\xi)$ minimal? Bringen Sie $\min\limits_{\xi \in \mathbb{R}} \text{rf}(\xi)$ in eine für die Berechnung geeignete Form.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie Einschließungen der Determinante $\det(A)$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3.74365012 & 1.79630413 \\ 11.23095037 & -5.38891239 \end{pmatrix},$$

indem Sie die Komponenten von A auf die entsprechenden Komponenten der Feldvariablen

```
a: array[1..2,1..2] of interval;
```

einlesen und die `interval`-Variable `det` einmal durch

```
det := a[1,1]*a[2,2]-a[1,2]*a[2,1];
```

und einmal durch

```
det := ##(a[1,1]*a[2,2]-a[1,2]*a[2,1]);
```

belegen.

Schätzen Sie für beide Einschließungen im Fall $0 \notin$ `det` den maximal möglichen Betrag des relativen Fehlers des Wertes von

```
d := 2*inf(det)*sup(det)/(inf(det)+sup(det));
```

(als Approximation von $\det(A)$) nach unten und nach oben ab.

Wie sind diese Abschätzungen für die durch `writeln(d)` ausgegebene Approximation des Wertes von `d` zu korrigieren?

Aufgabe 4:

Zu orthonormalen $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$ und $s, c \in \mathbb{R}$ mit $s^2 + c^2 = 1$ sei $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ durch

$$G(x) := x + \Big((c-1)\, x^\top u_1 - s\, x^\top u_2\Big)\, u_1 + \Big(s\, x^\top u_1 + (c-1)\, x^\top u_2\Big)\, u_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

definiert.

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $G(x)^\top G(y) = x^\top y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$,

b) $\|G(x)\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$,

c) (G ist linear und) $\det G = 1$,

d) $G(x) = x \quad \forall x \in (\text{span}(u_1, u_2))^\perp$,

e) $G(u_1) = c\, u_1 + s\, u_2$,
$G(u_2) = -s\, u_1 + c\, u_2$,

f) $G(\text{span}(u_1, u_2)) = \text{span}(u_1, u_2)$ und $G|_{\text{span}(u_1,u_2)}$ ist eine (ebene) Rotation.

Bestimmen Sie eine Matrix M_G, mit der $G(x) = M_G \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$ gilt.

Abgabetermin: Donnerstag, 20. Januar 2000, in der Vorlesung