BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Mathematische Grundlagen der Computergraphik

(Sommersemester 2001)

Übungsblatt 9

In den Aufgaben 1, 2 und 3 bezeichnet M einen zweidimensionalen euklidischen Punktraum bezüglich V , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $V \times V$ und $\mathfrak{n} : V \to V$ eine der beiden Normalenabbildungen.

Aufgabe 1:

Zu $\{P_0, P_1\} \subset M$ sei $\mathcal{G}$ die Gerade durch P_0 und P_1 (d.h. $\mathcal{G} = \{P_0 + \lambda \, \vec{P_0P_1} \, : \, \lambda \in \mathbb{R}\}$).

Zeigen Sie, daß gilt:

$$\mathcal{G} = \left\{ P \in M \, : \, \left\langle \vec{P_0P}, \mathfrak{n}(\vec{P_0P_1}) \right\rangle = 0 \right\} .$$

Eine (u.a. bei der Bestimmung der konvexen Hülle einer endlichen Teilmenge von M auftretende) Grundaufgabe der Computergeometrie besteht darin, für einen Punkt $P_2 \in M \backslash \{P_0, P_1\}$ festzustellen, ob P_2 in der „offenen Halbebene“

$$H_- := \left\{ P \in M \, : \, \left\langle \vec{P_0P}, \mathfrak{n}(\vec{P_0P_1}) \right\rangle < 0 \right\} ,$$

in der „offenen Halbebene“

$$H_+ := \left\{ P \in M \, : \, \left\langle \vec{P_0P}, \mathfrak{n}(\vec{P_0P_1}) \right\rangle > 0 \right\}$$

oder in $\mathcal{G}$ liegt, und, falls $P_2 \in \mathcal{G}$, also $P_2 = P_0 + \lambda \, \vec{P_0P_1}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ gilt, zu ermitteln, ob

- $\lambda < 0$ („P_0 zwischen P_2 und P_1“) ,
- $0 < \lambda < 1$ („P_2 zwischen P_0 und P_1“) oder
- $\lambda > 1$ („P_1 zwischen P_0 und P_2“) ist.

Dabei sind P_0, P_1 und P_2 i.a. durch ihre Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ bezüglich eines cartesischen Koordinatensystems $S = (O; e_1, e_2)$ von M mit $\mathfrak{n}(e_1) = e_2$ gegeben.

Skizzieren Sie Anweisungen für ein Computerprogramm zur Lösung dieser Aufgabe.

Gehen Sie dabei davon aus, daß die Koordinaten x_i, y_i, $i = 0, 1, 2$, dem zu verwendenden Gleitpunktsystem G angehören und daß für $a_i, b_i \in G$, $i = 1, \ldots, 6$, für die zu $s := \sum_{i=1}^{6} a_i b_i$ (i.a. $\notin G$) die Größen $\bigtriangledown s := \mathrm{Max}\{g \in G \, : \, g \leq s\}$ und $\bigtriangleup s := \mathrm{Min}\{g \in G \, : \, g \geq s\}$ existieren, $\bigtriangledown s$ und $\bigtriangleup s$ auch berechenbar sind.

Lösen Sie die Aufgabe für $P_2 = P_{2,i}$, $i = 1, \ldots, 5$, wenn

$$\begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.5 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -0.3 \\ -0.2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.35 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0.7 \\ -0.7 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.65 \end{pmatrix}$$

die Koordinatenvektoren von $P_0, P_1, P_{2,i}$, $i = 1, \ldots, 5$, bezüglich eines cartesischen Koordinatensystems $S = (O; e_1, e_2)$ von M mit $\mathfrak{n}(e_1) = e_2$ sind.

Kontrollieren Sie die Rechnung mit Hilfe einer maßstäblichen Skizze.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie:

a) $\forall \, P_0 \in M$, $\varphi \in \mathbb{R}$ und $w_1 \in V \backslash \{0\}$ gilt mit $w_2 := \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) w_1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathfrak{n}(w_1)$:

$$R_{(\mathfrak{n}, P_0, \varphi)} = S_{(P_0, w_2)} \circ S_{(P_0, w_1)} .$$

b) $\forall \, P_0 \in M$, $v \in V$ und $w \in V \backslash \{0\}$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ gilt:

$$T_v = S_{\left(P_0 + \frac{1}{2} v, w\right)} \circ S_{(P_0, w)} .$$

c) Jede Isometrie $\Phi : M \to M$ ist als Produkt von zwei oder drei Geradenspiegelungen darstellbar.

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung angegebenen Verknüpfungsregeln 1. – 10. und die durchgeführte Klassifizierung.

Aufgabe 3:

$\begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -0.3 \\ -0.2 \end{pmatrix}$ seien die Koordinatenvektoren von $P_0, Q_0 \in M$ bezüglich eines cartesischen Koordinatensystems $S = (O; e_1, e_2)$ von M mit $\mathfrak{n}(e_1) = e_2$, $\varphi_1 := -\frac{10\pi}{3}$, $\psi_1 := \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 := \frac{2\pi}{3}$, $\psi_2 := -\frac{8\pi}{3}$.

a) Zeigen Sie, daß mit einem $P \in M$ und einem $\varphi \in]-\pi, \pi]$

$$R_{(\mathfrak{n}, Q_0, \psi_1)} \circ R_{(\mathfrak{n}, P_0, \varphi_1)} = R_{(\mathfrak{n}, P, \varphi)}$$

gilt. Bestimmen Sie φ und den Koordinatenvektor von P bezüglich S.

b) Zeigen Sie, daß mit einem $v \in V$

$$R_{(\mathfrak{n}, Q_0, \psi_2)} \circ R_{(\mathfrak{n}, P_0, \varphi_2)} = T_v$$

gilt. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von v bezüglich (e_1, e_2) .

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung angegebene Verknüpfungsregel 5.

Aufgabe 4: (Explizite Diagonalisierung einer reellen symmetrischen (2×2)-Matrix)

Für die symmetrische Matrix $W := \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei

$$\delta := \sqrt{(w_{11} - w_{22})^2 + 4w_{12}^2} \ , \ \lambda_1 := \frac{1}{2}(w_{11} + w_{22} + \delta) \ , \ \lambda_2 := \frac{1}{2}(w_{11} + w_{22} - \delta)$$

und im Fall $\delta \neq 0$

$$c := \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{w_{11} - w_{22}}{\delta}\right)} \ , \ s := \operatorname{sign}(w_{12}) \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{w_{11} - w_{22}}{\delta}\right)} \text{ und } Q := \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, daß Q eigentlich orthogonal und $W = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q^\top$ ist.

(Im Fall $\delta = 0$ ist $\lambda_1 = \lambda_2 = w_{11}$ und $W = \begin{pmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{11} \end{pmatrix}$.)

Aufgabe 5:

$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei invertierbar,

$$q := a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \ \left(= \|A\|_F^2\right) \ , \ d := |\det(A)| \ , \ w := \sqrt{q + 2d} \ ,$$
$$U := \frac{1}{w}\begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + d & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 + d \end{pmatrix} \ , \ V := \frac{1}{w}\begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + d & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 + d \end{pmatrix} ,$$
$$\sigma := \operatorname{sign}(\det(A)) \ , \ R := \frac{1}{w}\begin{pmatrix} a_{11} + \sigma a_{22} & a_{12} - \sigma a_{21} \\ a_{21} - \sigma a_{12} & a_{22} + \sigma a_{11} \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie:

a) $U^2 = A^\top A$, $V^2 = AA^\top$.
b) $RU = VR = A$.
c) U, V sind symmetrisch und positiv definit.
d) R ist orthogonal. Insbesondere ist daher $w = \sqrt{(a_{11} + \sigma a_{22})^2 + (a_{12} + \sigma a_{21})^2}$.
e) Mit (explizit berechenbaren) orthogonalen Matrizen $S, T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einer (explizit berechenbaren) Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ gilt $A = SDT$.

(RU und VR nennt man *polare Zerlegungen* von A, SDT *Singuläre-Werte-Zerlegung* von A.)

Hinweis zu e): Benutzen Sie für $W = U$ oder $W = V$ die in der Aufgabe 4 angegebene Zerlegung $W = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q^\top$.

Abgabetermin: Mittwoch, 4. Juli 2001, in der Vorlesung