BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Mathematische Grundlagen der Computergraphik
(Sommersemester 2001)

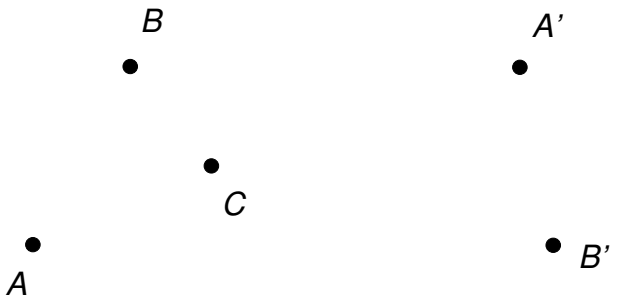
Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

M sei ein zweidimensionaler euklidischer Punktraum.

Zeigen Sie mit Hilfe der Erkenntnisse aus Aufgabe 2 auf Übungsblatt 7, daß es zu $A, B, A', B' \in M$ mit $A \neq B$ und $A' \neq B'$ genau eine eigentliche Ähnlichkeitsabbildung $T : M \to M$ und genau eine uneigentliche Ähnlichkeitsabbildung $\tilde{T} : M \to M$ gibt, die A in A' und B in B' abbilden.

Zeichnen Sie $T(C)$ und $\tilde{T}(C)$ zu



Aufgabe 2:

Mit

$$e_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\ ,\ e_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}\ ,\ e_1' := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ e_2' := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind $\mathfrak{b} := (e_1, e_2)$ und $\mathfrak{b}' := (e_1', e_2')$ Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie für

$$x := \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ y := \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- den absoluten Winkel $\sphericalangle(x, y)$,
- zu $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}}$ den orientierten Winkel $w_{\mathfrak{n}}(x, y)$ und
- zu $\mathfrak{n}' := \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}'}$ den orientierten Winkel $w_{\mathfrak{n}'}(x, y)$.

Sind $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ gleich orientiert?

Wie verhalten sich $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ zueinander?

Aufgabe 3:

Beweisen Sie die Behauptung b) des Lemmas IV.11 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4:

$(O; e_1, e_2, e_3)$ sei ein cartesisches Koordinatensystem eines (dreidimensionalen) euklidischen Punktraumes M bezüglich V. Ferner sei

$$\Phi : M \ni P \longmapsto O - \langle \vec{OP}, e_2 \rangle \, e_1 + \langle \vec{OP}, e_1 \rangle \, e_2 - \langle \vec{OP}, e_3 \rangle \, e_3 \in M$$

und $v := \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3)$.

a) Zeigen Sie, daß Φ affin ist, und bestimmen Sie $L := L_\Phi$ und $M_{\mathfrak{A}}(L)$ zu $\mathfrak{A} := (e_1, e_2, e_3)$.

b) Zeigen Sie, daß Φ eine uneigentliche Isometrie ist.

c) Bestimmen Sie F_L , ein $v' \in F_L$, ein $w' \in (F_L)^\perp$ und eine Isometrie $\Psi : M \to M$ mit Fixpunkt $O + w'$ derart, daß gilt:

$$v \circ \Phi = v' \circ \Psi \, .$$

d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von F_{-L} , eine Orthonormalbasis von $(F_{-L})^\perp$, ein $\tilde{v}' \in (F_{-L})^\perp$, ein $\tilde{w}' \in F_{-L}$ und eine Isometrie $\tilde{\Psi} : M \to M$ mit Fixpunkt $O + \tilde{w}'$ derart, daß gilt:

$$v \circ \Phi = \tilde{v}' \circ \tilde{\Psi} \, .$$

Anleitung: Verwenden Sie Lemma IV.11 !

Aufgabe 5:

M sei ein zweidimensionaler euklidischer Punktraum bezüglich V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $V \times V$ und $|\cdot|$ die zugehörige Norm auf V.

a) Zu $P_0 \in M$, $\varphi \in \mathbb{R}$ und der Normalenabbildung $\mathfrak{n} : V \to V$ sei

$$R_{(\mathfrak{n}, P_0, \varphi)} : M \ni P \longmapsto P_0 + \cos(\varphi) \, \vec{P_0P} + \sin(\varphi) \, \mathfrak{n}(\vec{P_0P}) \in M \, .$$

Zeigen Sie, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

1) $R_{(\mathfrak{n}, Q_0, \psi)} = R_{(\mathfrak{n}, P_0, \varphi)}$
2) $\psi \bmod 2\pi = \varphi \bmod 2\pi$, und $Q_0 = P_0$ falls $\varphi \bmod 2\pi \neq 0$.

b) Zu $Q \in M$ und $w \in V \backslash \{0\}$ sei

$$S_{(Q,w)} : M \ni P \longmapsto P - 2 \left(\vec{QP} - \frac{\left\langle \vec{QP}, w \right\rangle}{|w|^2} \, w \right) \in M \, .$$

Zeigen Sie, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

1) $S_{(Q',w')} = S_{(Q,w)}$
2) $\{Q' + \lambda w' \, : \, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{Q + \lambda w \, : \, \lambda \in \mathbb{R}\}$
3) w, w' sind linear abhängig und $\vec{QQ'} \in \operatorname{span}\{w\} \;\; (= \operatorname{span}\{w'\})$.

Abgabetermin: Mittwoch, 27. Juni 2001, in der Vorlesung