BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Mathematische Grundlagen der Computergraphik
(Sommersemester 2001)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

M sei ein n-dimensionaler affiner Punktraum bezüglich V. Ferner bezeichne S_Q zu jedem $Q \in M$ die Punktspiegelung

$$S_Q : M \ni P \longmapsto P + 2\,\vec{PQ} \in M$$

(mit dem eindeutig bestimmten Fixpunkt Q), und T_v zu jedem $v \in V$ die Translation

$$T_v : M \ni P \longmapsto P + v \in M$$

(T_v ist nur eine umständliche (aber übliche) Schreibweise für v !).

Zeigen Sie:

a) Ist $\Phi : M \to M$ affin und $v \in V$, so sind Φ und T_v genau dann vertauschbar (d.h. $\Phi \circ T_v = T_v \circ \Phi$), wenn $v \in F_{L_\Phi}$ (d.h. $L_\Phi(v) = v$) gilt.

b) Eine affine Abbildung $\Phi : M \to M$ ist genau dann eine Translation (Punktspiegelung), wenn $L_\Phi = \mathrm{id}_V$ ($L_\Phi = -\mathrm{id}_V$) gilt.

c) $S_{Q_2} \circ S_{Q_1} = T_{2\,\vec{Q_1Q_2}} \quad \forall\, Q_1, Q_2 \in M$ (insbesondere $S_Q^2 = \mathrm{id}_M \quad \forall\, Q \in M$).

d) $T_v \circ S_Q = S_{Q+\frac{1}{2}v}$ und $S_Q \circ T_v = S_{Q-\frac{1}{2}v}$ für alle $Q \in M$ und $v \in V$.
(Führt man vor oder nach einer Punktspiegelung eine Translation durch, so erhält man wieder eine Punktspiegelung. Aber $T_v \circ S_Q \neq S_Q \circ T_v$, falls $v \neq 0$.)

Aufgabe 2:

Zu $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $a' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}$, $b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq b$ und $a' \neq b'$ sei $d := b - a$, $d' := b' - a'$,

$$Q := \frac{1}{|d||d'|} \begin{pmatrix} d^\top d' & -\mathfrak{n}(d)^\top d' \\ \mathfrak{n}(d)^\top d' & d^\top d' \end{pmatrix} \; (\in \mathbb{R}^{2\times 2})$$

und

$$T : \mathbb{R}^2 \ni x \longmapsto a' + \frac{|d'|}{|d|}\, Q(x - a) \in \mathbb{R}^2 \;,$$

wobei

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{n}(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,.$$

Zeigen Sie:

a) Q ist eigentlich orthogonal.

b) T ist eine eigentliche Ähnlichkeitsabbildung mit $T(a) = a'$ und $T(b) = b'$.

c) Neben T gibt es genau eine weitere Ähnlichkeitsabbildung $\tilde{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{T}(a) = a'$ und $\tilde{T}(b) = b'$.

d) $\tilde{T}$ ist uneigentlich.

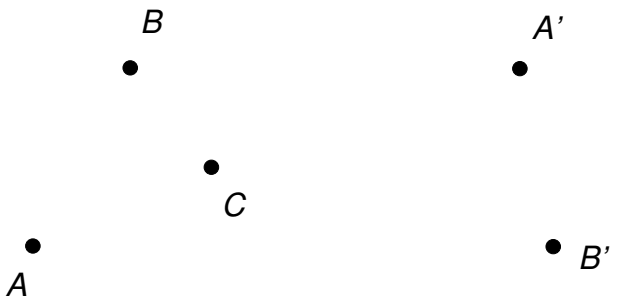
e) T und $\tilde{T}$ sind genau dann Isometrien, wenn $|d| = |d'|$ ist.

Aufgabe 3:

M sei ein zweidimensionaler euklidischer Punktraum.

Zeigen Sie mit Hilfe der Erkenntnisse aus Aufgabe 2, daß es zu $A, B, A', B' \in M$ mit $A \neq B$ und $A' \neq B'$ genau eine eigentliche Ähnlichkeitsabbildung $T : M \to M$ und genau eine uneigentliche Ähnlichkeitsabbildung $\tilde{T} : M \to M$ gibt, die A in A' und B in B' abbilden.

Zeichnen Sie $T(C)$ und $\tilde{T}(C)$ zu



Aufgabe 4:

Mit

$$e_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},\ e_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix},\ e_1' := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2' := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind $\mathfrak{b} := (e_1, e_2)$ und $\mathfrak{b}' := (e_1', e_2')$ Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie für

$$x := \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},\ y := \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- den absoluten Winkel $\sphericalangle(x, y)$,
- zu $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}}$ den orientierten Winkel $w_{\mathfrak{n}}(x, y)$ und
- zu $\mathfrak{n}' := \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}'}$ den orientierten Winkel $w_{\mathfrak{n}'}(x, y)$.

Sind $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ gleich orientiert?

Wie verhalten sich $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ zueinander?

Abgabetermin: Mittwoch, 20. Juni 2001, in der Vorlesung