BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Mathematische Grundlagen der Computergraphik
(Sommersemester 2001)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

V sei ein n-dimensionaler reeller Vektorraum ($n \geq 2$).

Gibt es zu $L \in \mathrm{End}(V)$ eine Basis $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V, für die

$$L(v_j) \in \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_j\} \ , \ j = 1, \ldots, n,$$

gilt, so ist $M_{\mathfrak{A}}(L)$ eine obere Dreiecksmatrix, und mit $d_i := M_{\mathfrak{A}}(L)_{i,i} \ , \ i = 1, \ldots, n$, hat man

$$\mathrm{p}_L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (d_i - \lambda) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \ ,$$

woraus man folgern kann:

$$\begin{aligned} &\mathrm{sp}(L) = \bigcup_{i=1}^{n} \{d_i\} \ , \\ &\nu(\lambda) = \#\{i \ : \ d_i = \lambda\} \quad \forall\, \lambda \in \mathrm{sp}(L) \ , \\ &\mathrm{spur}(L) = \sum_{i=1}^{n} d_i \quad \text{und} \quad \det(L) = \prod_{i=1}^{n} d_i \ . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie p_L , $\mathrm{sp}(L)$, $\nu(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathrm{sp}(L)$, $\mathrm{spur}(L)$ und $\det(L)$ für folgende speziellen L :

1) Es gibt einen Untervektorraum $V_1 \neq \{0\}$ von V :

$$L(v) - v \in V_1 \ \ \forall\, v \in V \quad \text{und} \quad L|V_1 = \mathrm{id}_{V_1} \ .$$

Man nennt dann L eine *Scherung parallel zu* V_1.
Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis $(v_1, \ldots, v_k)$ von V_1 zu einer Basis von V.

2) Es gibt ein $l \in V^* \backslash \{0\}$ und ein $w \in V$:

$$L(v) = v + l(v)\, w \quad \forall\, v \in V \ .$$

Man nennt dann L eine *Dyade*.
Hinweis: Wählen Sie eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V mit $l(v_i) = 0, \ i = 1, \ldots, n-1$, und $l(v_n) = 1$.
Bezeichnet dann $(l_1, \ldots, l_n)$ die zu $(v_1, \ldots, v_n)$ duale Basis, so ist $l_n = l$ und folglich

$$w = \sum_{i=1}^{n-1} l_i(w)\, v_i + l(w)\, v_n \ .$$

3) Es gibt eine Basis $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V und $s_i \in \,]0, \infty[$, $i = 1, \ldots, n$:

$$L(v_i) = s_i\, v_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Man nennt dann L eine *Skalierung(sabbildung)* bezüglich $\mathfrak{A}$.

Aufgabe 2:

Gegeben seien eine Basis (v_1, v_2) eines (zweidimensionalen) reellen Vektorraums V, $s, c \in \mathbb{R}$ mit $s^2 + c^2 = 1$ und $c \neq 0$, sowie $S_1, S_2, S_3 \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch

$$\begin{array}{lll} S_1(v_1) := v_1 + \dfrac{s}{c}\, v_2 & S_2(v_1) := v_1 & S_3(v_1) := \dfrac{1}{|c|}\, v_1 \\ S_1(v_2) := v_2 & S_2(v_2) := -s\, c\, v_1 + v_2 & S_3(v_2) := |c|\, v_2 \quad . \end{array}$$

Zeigen Sie:

a) S_1 ist eine Scherung parallel zu $\mathrm{span}\{v_2\}$.
b) S_2 ist eine Scherung parallel zu $\mathrm{span}\{v_1\}$.
c) S_3 ist eine Skalierung bezüglich (v_1, v_2) .
d) Für $T := \mathrm{sign}(c)\, S_3 \circ S_2 \circ S_1$ gilt:

$$T(v_1) = c\, v_1 + s\, v_2 \quad , \quad T(v_2) = -s\, v_1 + c\, v_2 \; .$$

Bemerkung: Ist V euklidisch und (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis von V, so ist T eine eigentliche Isometrie. Die durch d) gegebene Faktorisierung wird unter anderem zur Berechnung von Rotationen sogenannter bitmaps verwendet.

Aufgabe 3:

(v_1, v_2) sei eine Basis eines (zweidimensionalen) reellen Vektorraums V.
$S_1, S_2 \in \mathrm{End}(V)$ seien definiert durch

$$\begin{array}{ll} S_1(v_1 + v_2) := v_1 + v_2 & \text{und} \quad S_2(v_1) := v_1 \\ S_1(v_2) := -v_1 & \qquad\quad\; S_2(v_2) := v_2 - 2\, v_1 \; . \end{array}$$

Zeigen Sie:

a) S_1 ist eine Scherung parallel zu $\mathrm{span}\{v_1 + v_2\}$.
b) S_2 ist eine Scherung parallel zu $\mathrm{span}\{v_1\}$.
c) Für $T := S_2 \circ S_1$ gilt

$$T(v_1) = v_2 \quad , \quad T(v_2) = -v_1 \; .$$

Skizzieren Sie $Q := \{0, v_1, v_1 + v_2, v_2\}$, $S_1(Q)$ und $T(Q)$ $(= S_2(S_1(Q)))$.

Bemerkung: Ist V euklidisch und (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis von V, so ist T die Drehung mit dem bezüglich (v_1, v_2) orientierten Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ $(\sim 90°)$. Beachten Sie, daß für diese Drehung die in Aufgabe 2 angegebene Faktorisierung nicht möglich ist!

Aufgabe 4:

M sei ein n-dimensionaler affiner Punktraum bezüglich V. $T : M \to M$ sei affin.

Zeigen Sie:

a) Die Menge $\{P \in M \,:\, T(P) = P\}$ der Fixpunkte von T ist leer oder ein affiner Unterraum von M.
b) Ist M euklidisch und T eine Ähnlichkeitstransformation mit einem (Ähnlichkeitsfaktor) $s \in]0, \infty[$ (vergleiche Aufgabe 4 auf Übungsblatt 5), so hat T im Fall $s \neq 1$ genau einen Fixpunkt.
c) Ist M euklidisch, $n = 2$ und T eine eigentliche Isometrie mit $L_T \neq \mathrm{id}_V$, so hat T genau einen Fixpunkt.

Abgabetermin: Mittwoch, 6. Juni 2001, in der Vorlesung