BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Mathematische Grundlagen der Computergraphik
(Sommersemester 2001)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

Unter Zugrundelegung der Voraussetzungen, Bezeichnungen und Resultate der Aufgabe 3 des Übungsblattes 4 sei

$$T : M \ni Q \longmapsto \pi(Q) + [Q, \vec{\pi}(Q)] \in M$$

(die Spiegelung von M an L).

Zeigen Sie:

a) T ist eine Isometrie, die L punktweise fest läßt und für die $T \circ T = \mathrm{id}_M$ gilt.

b) Im Fall $\mathrm{Dim} M = m \ \ (\geq n)$ ist T genau dann eigentlich, wenn $(m - n)$ gerade ist.

(Zum Beispiel ist für $m = 2$ die Spiegelung an einem Punkt eigentlich, die Spiegelung an einer Geraden uneigentlich. Für $m = 3$ dagegen ist die Spiegelung an einem Punkt ebenso wie die Spiegelung an einer Ebene uneigentlich, die Spiegelung an einer Geraden eigentlich.)

Hinweis zu a): Zeigen Sie, daß für alle $P, Q \in M$ gilt:

$$[T(P)\vec{,}T(Q)] = [\pi(P)\vec{,}\pi(Q)] + \Big([Q, \vec{\pi}(Q)] - [P, \vec{\pi}(P)]\Big) ,$$
$$\vec{PQ} = [\pi(P)\vec{,}\pi(Q)] - \Big([Q, \vec{\pi}(Q)] - [P, \vec{\pi}(P)]\Big) \text{ und}$$
$$\Big\langle [\pi(P)\vec{,}\pi(Q)] \ , \ [Q, \vec{\pi}(Q)] - [P, \vec{\pi}(P)] \Big\rangle = 0 \ .$$

Zum Nachweis von $T \circ T = \mathrm{id}_M$ ist es zweckmäßig zuerst festzustellen, daß aus $Q \in M$, $P \in L$ und $\langle \vec{QP}, v \rangle = 0 \ \ \forall\, v \in U_L$ die Gleichheit $P = \pi(Q)$ folgt und daher für alle $Q \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (insbesondere für $\lambda = 1$) gilt:

$$\pi\Big(\pi(Q) + \lambda\, [Q, \vec{\pi}(Q)]\Big) = \pi(Q) \ .$$

Aufgabe 2:

M sei ein n-dimensionaler ($n \geq 1$) affiner Punktraum bezüglich V.
Zu jedem $v \in V$ bezeichne T_v die Translation $M \ni P \longmapsto P + v \in M$.
$\Phi : M \to M$ sei affin.

Zeigen Sie:

a) Für jedes $v \in V$ gilt: $\Phi \circ T_v = T_{L_\Phi(v)} \circ \Phi$.

b) Zu jedem $Q \in M$ gibt es genau eine affine Abbildung $\Psi : M \to M$ mit Fixpunkt Q (nämlich $\Psi : M \ni P \longmapsto Q + L_\Phi\Big(\vec{QP}\Big)$) und genau ein $v \in V$ (nämlich $v = [Q, \vec{\Phi}(Q)]$), so daß $\Phi = T_v \circ \Psi$ gilt. Ist L_Φ invertierbar, so hat man auch $\Phi = \Psi \circ T_{L_\Phi^{-1}(v)}$.

c) Φ hat genau dann einen eindeutig bestimmten Fixpunkt, wenn L_Φ keinen von 0 verschiedenen Fixpunkt hat.
Hinweis: L_Φ hat genau dann keinen von 0 verschiedenen Fixpunkt, wenn $(\mathrm{id}_V - L_\Phi)$ invertierbar ist. Betrachten Sie in diesem Fall zu beliebigem $P_0 \in M$ den Punkt $P_0 + (\mathrm{id}_V - L_\Phi)^{-1}[P_0, \vec{\Phi}(P_0)]$.

Aufgabe 3:

M sei ein n-dimensionaler ($n \geq 1$) euklidischer Punktraum bezüglich V.

a) Zu $P, Q, R \in M$ mit $\varrho(P,Q) = \varrho(P,R)$ und $v := \vec{PQ} + \vec{PR} \neq 0$ sei π die Spiegelung von M an der Geraden $\{P + \lambda v \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, daß $\pi(Q) = R$ (und $\pi(R) = Q$) gilt.

b) Zeigen Sie, daß für jedes $v \in V$ die Translation $T_v : M \ni P \longmapsto P + v \in M$ eine eigentliche Isometrie ist.

c) $\Phi : M \to M$ sei eine Isometrie und $Q \in M$. Zeigen Sie, daß mit der Isometrie $\Psi : M \ni P \longmapsto Q + L_\Phi(\vec{QP})$ (die Q als Fixpunkt hat) , mit $v := [Q, \vec{\Phi}(Q)]$ und $w := L_\Phi^{\mathrm{ad}}(v)$ $\Phi = T_v \circ \Psi = \Psi \circ T_w$ gilt.

Aufgabe 4:

M sei ein n-dimensionaler euklidischer Punktraum bezüglich V,
$T : M \to M$ eine Ähnlichkeitstransformation, d.h. mit einem $s \in]0, \infty[$ gelte

$$|[T(P),\vec{T}(Q)]| = s\,|\vec{PQ}| \quad \forall\, P, Q \in M\ .$$

Zeigen Sie:

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Isometrie $L : V \to V$, für die gilt:

$$[T(P),\vec{T}(Q)] = s\,L(\vec{PQ}) \quad \forall\, P, Q \in M\ .$$

b) T ist winkeltreu, d.h. $\forall\, P, Q, R \in M$ mit $Q \neq P$ und $R \neq P$ gilt:

$$\sphericalangle\Big([T(P),\vec{T}(Q)]\,,\,[T(P),\vec{T}(R)]\Big) = \sphericalangle\Big(\vec{PQ}, \vec{PR}\Big)\ .$$

Hinweis zu a): Zeigen Sie, daß für jedes $P_0 \in M$

$$\tilde{T} : M \ni P \longmapsto T(P_0) + \frac{1}{s}\,[T(P_0),\vec{T}(P)]$$

eine Isometrie ist mit

$$\Big[\tilde{T}(P),\vec{\tilde{T}}(Q)\Big] = \frac{1}{s}\,[T(P),\vec{T}(Q)] \quad \forall\, P, Q \in M\ .$$

Aufgabe 5:

$(v_1, \ldots, v_n)$ sei eine Basis des reellen Vektorraumes V.
Für alle $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ sei $L_{i,j} \in \mathrm{End}(V)$ durch $L_{i,j}(v_k) = \delta_{ik} v_j$, $k = 1, \ldots, n$, erklärt.

Zeigen Sie:

a) $(L_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$ ist eine Basis von $\mathrm{End}(V)$.

b) Es gibt genau ein lineares Funktional μ auf $\mathrm{End}(V)$ mit den Eigenschaften:

$$\mu(L_1 \circ L_2) = \mu(L_2 \circ L_1) \quad \forall\, L_1, L_2 \in \mathrm{End}(V)\,,$$
$$\mu(\mathrm{id}_V) = n\ .$$

Hinweis zu b): Zeigen Sie, daß durch die von μ geforderten Eigenschaften die Werte $\mu(L_{i,j})$, $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, eindeutig festgelegt sind.

Abgabetermin: Mittwoch, 30. Mai 2001, in der Vorlesung