BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7

MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Mathematische Grundlagen der Computergraphik

(Sommersemester 2001)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

M sei ein dreidimensionaler euklidischer Punktraum bezüglich V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf $V\times V$, $|\cdot|$ die zugehörige Norm auf V, $\mathfrak{B}:=(e_1,e_2,e_3)$ eine Orthonormalbasis von V und $\times$ das Vektorprodukt bezüglich $\mathfrak{B}$.

a) Zu $P\in M$ und $\mathfrak{n}\in V\backslash\{0\}$ sei $E:=\left\{Q\in M\,:\,\left\langle \mathfrak{n},\vec{PQ}\right\rangle=0\right\}$.
Zeigen Sie: Setzt man zu von $\mathfrak{n}$ linear unabhängigem $v\in V$ die Vektoren $v_1:=v\times\mathfrak{n}$ und $v_2:=\mathfrak{n}\times v_1$, so ist $(v_1,v_2,\mathfrak{n})$ eine mit $\mathfrak{B}$ gleichorientierte Orthogonalbasis von V und es gilt $E=\{P+\lambda_1v_1+\lambda_2v_2\,:\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}$.
Insbesondere ist also E eine Ebene und (v_1,v_2) eine Orthogonalbasis von U_E.

b) Zu $P\in M$ und linear unabhängigen $v_1,v_2\in V$ sei E die Ebene $\{P+\lambda_1v_1+\lambda_2v_2\,:\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}$.
Zeigen Sie, daß $E=\left\{Q\in M\,:\,\left\langle v_1\times v_2,\vec{PQ}\right\rangle=0\right\}$ gilt.

Aufgabe 2:

V sei ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf $V\times V$ und $\times$ eines der beiden Vektorprodukte auf $V\times V$.

Zeigen Sie:

a) Definiert man zu einer Basis (v_1,v_2,v_3) von V

$$v_1^*:=\frac{1}{\langle v_2\times v_3,v_1\rangle}\,v_2\times v_3\ ,\ \ v_2^*:=\frac{1}{\langle v_3\times v_1,v_2\rangle}\,v_3\times v_1\ ,\ \ v_3^*:=\frac{1}{\langle v_1\times v_2,v_3\rangle}\,v_1\times v_2\ ,$$

so ist (v_1^*,v_2^*,v_3^*) eine Basis von V und es gilt $\left\langle v_i,v_j^*\right\rangle=\delta_{ij}\ \ \forall\,i,j\in\{1,2,3\}$.

b) Ist (v_1,v_2,v_3) eine Basis von V, so gibt es genau eine Basis (v_1^*,v_2^*,v_3^*) von V, für die $\left\langle v_i,v_j^*\right\rangle=\delta_{ij}\ \ \forall\,i,j\in\{1,2,3\}$ gilt. (v_1^*,v_2^*,v_3^*) heißt die zu (v_1,v_2,v_3) *reziproke* Basis. (v_1^*,v_2^*,v_3^*) und (v_1,v_2,v_3) sind gleichorientiert.

c) Für jede Basis (v_1,v_2,v_3) von V gilt $\left((v_1^*)^*,(v_2^*)^*,(v_3^*)^*\right)=(v_1,v_2,v_3)$.

d) $(v_1^*,v_2^*,v_3^*)=(v_1,v_2,v_3)$ gilt genau dann, wenn (v_1,v_2,v_3) eine Orthonormalbasis von V ist.

e) Ist (v_1,v_2,v_3) eine Basis von V, so gilt für alle $v\in V$:

$$v=\sum_{i=1}^{3}\langle v,v_i^*\rangle\,v_i=\sum_{i=1}^{3}\langle v,v_i\rangle\,v_i^*\ .$$

Aufgabe 3:

M sei ein euklidischer Punktraum bezüglich V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf $V\times V$, $|\cdot|$ die zugehörige Norm auf V und ϱ die induzierte Metrik auf $M\times M$ ($\varrho(P,Q):=|\vec{PQ}|\ \ \forall\,P,Q\in M$). L sei ein n-dimensionaler affiner Unterraum von M.

Zeigen Sie:

a) Es gibt genau eine Abbildung $\pi:M\to L$ mit der Eigenschaft $\left\langle(Q,\vec{\pi}(Q)),v\right\rangle=0\ \ \forall\,v\in U_L$.
π heißt die *Orthogonalprojektion* von M auf L.
Ist $(v_1,\ldots,v_n)$ eine Basis von U_L, so ist die (Gramsche) Matrix $G(v_1,\ldots,v_n):=(\langle v_i,v_j\rangle)_{i,j=1}^n$ regulär,
und für jedes $Q\in M$ und jedes $P\in L$ gilt mit den durch

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*\langle v_i,v_j\rangle=\left\langle\vec{PQ},v_j\right\rangle\ ,\ j=1,\ldots,n,\qquad\text{(NG)}$$

eindeutig bestimmten $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*$:

$$\pi(Q)=P+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*v_i\ .$$

Ferner ist mit $v_{n+1} := \vec{PQ}$ und $G(v_1, \ldots, v_{n+1}) := (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^{n+1}$

$$\varrho(Q, \pi(Q))^2 = \frac{\det G(v_1, \ldots, v_{n+1})}{\det G(v_1, \ldots, v_n)} \ .$$

Hinweis zur Ableitung der Abstandsformel: Zeigen Sie, daß für $d := \varrho(Q, \pi(Q))$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \langle v_{n+1}, v_i \rangle + d^2 = \langle v_{n+1}, v_{n+1} \rangle \ .$$

Zusammen mit (NG) hat man dann ein lineares Gleichungssystem für $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*, d^2$. Wenden Sie zur Bestimmung von d^2 die Cramersche Regel an.

b) $\varrho(Q, \pi(Q)) < \varrho(Q, P)$ für alle $Q \in M$ und $P \in L \backslash \{\pi(Q)\}$.

c) Ist mit einem $P \in M$ und einem $v \in V \backslash \{0\}$ L die Gerade $\{P + \lambda v \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$, so ist

$$\pi(Q) = P + \frac{\left\langle \vec{PQ}, v \right\rangle}{\langle v, v \rangle} v \quad \forall\, Q \in M \ .$$

(In Übereinstimmung mit Aufgabe 2 auf Blatt 3!)

d) Ist mit einem $P \in M$ und linear unabhängigen $v_1, v_2 \in V$ L die Ebene $\{P + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \ : \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$, so ist $\pi(Q) = P + \lambda_1^* v_1 + \lambda_2^* v_2$ mit

$$\lambda_1^* = \frac{\left\langle \vec{PQ}, |v_2|^2 v_1 - \langle v_1, v_2 \rangle v_2 \right\rangle}{|v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2} \ , \quad \lambda_2^* = \frac{\left\langle \vec{PQ}, |v_1|^2 v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_1 \right\rangle}{|v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2} \ .$$

Ist im Fall $\dim V = 3$ $\times$ ein Vektorprodukt auf $V \times V$, so gilt

$$\pi(Q) = Q - \frac{\left\langle v_1 \times v_2, \vec{PQ} \right\rangle}{|v_1 \times v_2|^2} (v_1 \times v_2)$$

und

$$\varrho(Q, \pi(Q)) = \frac{\left| \left\langle v_1 \times v_2, \vec{PQ} \right\rangle \right|}{|v_1 \times v_2|} \ .$$

e) π ist affin.

Aufgabe 4:

M sei ein euklidischer Punktraum bezüglich V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $V \times V$, $|\cdot|$ die zugehörige Norm auf V und ϱ die zugehörige Metrik auf $M \times M$.

$G_i := \{P_i + \lambda v_i \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, 2$, seien nicht parallele Geraden in M.

Zeigen Sie:

a) Es gibt genau einen Punkt $P^* = P_1 + \lambda_1^* v_1 \in G_1$ und genau einen Punkt $Q^* = P_2 + \lambda_2^* v_2 \in G_2$ mit

$$\varrho(P^*, Q^*) = \mathrm{Min}\, \{\varrho(P, Q) \ : \ P \in G_1, Q \in G_2\} \ .$$

b)

$$\lambda_1^* = \frac{\left\langle \vec{P_1P_2}, v_1 \right\rangle |v_2|^2 - \left\langle \vec{P_1P_2}, v_2 \right\rangle \langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2} \ , \quad \lambda_2^* = \frac{\left\langle \vec{P_2P_1}, v_2 \right\rangle |v_1|^2 - \left\langle \vec{P_2P_1}, v_1 \right\rangle \langle v_2, v_1 \rangle}{|v_2|^2 |v_1|^2 - \langle v_2, v_1 \rangle^2} \ .$$

c) Ist $\dim V = 3$ und $\times$ ein Vektorprodukt auf $V \times V$, so gilt

$$\varrho(P^*, Q^*) = \frac{\left| \left\langle v_1 \times v_2, \vec{P_1P_2} \right\rangle \right|}{|v_1 \times v_2|} \ .$$

Insbesondere gilt genau dann $P^* = Q^*$ ($\Leftrightarrow$ G_1 und G_2 haben genau eine Punkt gemeinsam), wenn $\vec{P_1P_2} \in \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ ist.

Abgabetermin: Mittwoch, 23. Mai 2001, in der Vorlesung