BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

*Fachbereich 7*
**MATHEMATIK**

G. Heindl / P. Feuerstein

**Mathematische Grundlagen der Computergraphik**
(Sommersemester 2001)

**Übungsblatt 3**

**Aufgabe 1:**

$M$ sei ein affiner Punktraum bezüglich $V$.

Mit $P_i \in M$, $v_i \in V\backslash\{0\}$ sei ferner $G_i$ die Gerade $\{P_i + \lambda v_i \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ , $i = 1, 2$.

$G_1$, $G_2$ heißen *windschief*, wenn $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $G_1$, $G_2$ nicht parallel$^*$ sind.

Zeigen Sie:

a) $G_1$, $G_2$ windschief $\Leftrightarrow$ $\vec{P_1P_2} \notin \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ und $v_1$, $v_2$ linear unabhängig.
b) $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $G_1 \| G_2$ $\Leftrightarrow$ $\vec{P_1P_2} \notin \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ und $v_1$, $v_2$ linear abhängig.
c) $G_1 \cap G_2$ ist einpunktig $\Leftrightarrow$ $\vec{P_1P_2} \in \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ und $v_1$, $v_2$ linear unabhängig.
d) $G_1 = G_2$ $\Leftrightarrow$ $\vec{P_1P_2} \in \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ und $v_1$, $v_2$ linear abhängig.

Welche der Fälle a), b), c), d) können für $\mathrm{Dim}M = 1, 2, 3$ nicht auftreten?

$*$) Affine Unterräume $L_1$, $L_2$ von $M$ heißen *parallel*, in Zeichen $L_1 \| L_2$, wenn $U_{L_1} \subset U_{L_2}$ oder $U_{L_2} \subset U_{L_1}$ gilt. Im Fall $\mathrm{Dim}L_1 = \mathrm{Dim}L_2 = n$ sind somit $L_1$ und $L_2$ genau dann parallel, wenn $U_{L_2} = U_{L_1}$ ist.

**Aufgabe 2:** (Schneiden von Geraden mit Sphären)

$M$ sei ein euklidischer Punktraum bezüglich $V$.

Mit $P_0$, $Q \in M$, $v \in V\backslash\{0\}$ , $r \in ]0, \infty[$ sei weiter

$$G := \{P_0 + \lambda v \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\} ,$$
$$S_r(Q) := \{P \in M \,:\, \varrho(P, Q) = r\} \quad \left(= \left\{P \in M \,:\, \left\langle \vec{QP}, \vec{QP} \right\rangle = r^2 \right\}\right) .$$

Zeigen Sie, daß mit

$$w := \vec{QP_0} \ , \ r_{\min} := \frac{\sqrt{|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2}}{|v|} ,$$
$$\Delta_+ := r + r_{\min} \ , \ \Delta_- := r - r_{\min} ,$$
$$P_m := P_0 - \frac{\langle v, w\rangle}{|v|^2}\, v$$

gilt:

a) $G \cap S_r(Q) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } r < r_{\min} \\ \{P_m\} & \text{falls } r = r_{\min} \\ \left\{ P_m - \frac{\sqrt{\Delta_+\Delta_-}}{|v|}\, v \ , \ P_m + \frac{\sqrt{\Delta_+\Delta_-}}{|v|}\, v \right\} & \text{falls } r > r_{\min} . \end{cases}$

b) $\varrho(Q, P_m) = r_{\min}$ . Ist $\mathrm{Dim}M = 3$ und $\times$ ein Vektorprodukt auf $V \times V$, so ist $\varrho(Q, P_m) = \frac{|v \times \vec{QP_0}|}{|v|}$ .
c) Jeder Punkt $P \in G\backslash\{P_m\}$ hat von $Q$ einen größeren Abstand als $P_m$ .
d) Es gibt genau einen Punkt $Q' \in G$ mit $\left\langle \vec{QQ'}, v \right\rangle = 0$ , nämlich $Q' = P_m$ .

**Aufgabe 3:**

$V$ sei ein euklidischer Vektorraum, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt (auf $V \times V$) und $|\cdot|$ die Norm (auf $V$).

Zu $v_1, v_2 \in V\backslash\{0\}$ gibt es genau ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit

$$\cos\varphi = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{|v_1||v_2|} \quad (\in [-1, 1]\ !)\ .$$

$\varphi$ heißt der (*absolute*) *Winkel* zwischen $v_1$ und $v_2$ , in Zeichen $\sphericalangle(v_1, v_2)$ .

Zeigen Sie:

Für linear unabhängige $v_1, v_2 \in V$ mit $|v_1| = |v_2| =: r$ ist

$$\varphi := \sphericalangle(v_1, v_2) \in ]0, \pi[$$

und folglich $\sin\varphi > 0$ . Für

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto x(t) := \frac{\sin(\varphi - t)}{\sin\varphi}\, v_1 + \frac{\sin t}{\sin\varphi}\, v_2 \in V$$

gilt ferner:

$$\begin{aligned}
&|x(t)| = r \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\ ,\\
&x(0) = v_1\ , x(\varphi) = v_2\ , x(\pi) = -v_1\ ,\\
&x(t) \in \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\ :\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0\} \quad \forall\, t \in [0, \varphi]\ .
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4:**

$M$ sei ein dreidimensionaler euklidischer Punktraum bezüglich $V$, $\times$ ein Vektorprodukt auf $V \times V$.

Zu $P_0, P_0' \in M$, linear unabhängigen $v_1, v_2 \in V$ und linear unabhängigen $v_1', v_2' \in V$ seien die Ebenen

$$\begin{aligned}
E &:= \{P_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\ :\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \quad \text{und}\\
E' &:= \left\{P_0' + \lambda_1' v_1' + \lambda_2' v_2'\ :\ \lambda_1', \lambda_2' \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

gegeben.

Zeigen Sie:

a) $E$ und $E'$ sind genau dann nicht parallel (d.h. $\operatorname{span}\{v_1, v_2\} \neq \operatorname{span}\{v_1', v_2'\}$), wenn $\mathfrak{n} := v_1 \times v_2$ und $\mathfrak{n}' := v_1' \times v_2'$ linear unabhängig sind.

b) Sind $E$ und $E'$ nicht parallel, so ist $E \cap E'$ eine Gerade mit

$$U_{E\cap E'} = \left\{\lambda\big(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}'\big)\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}\ .$$

Für jedes $v \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}\backslash\operatorname{span}\{v_1', v_2'\}$ schneidet die Gerade $\{P_0 + \lambda v\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\} \subset E$ die Ebene $E'$ in genau einem Punkt ($\in E \cap E'$).

***Abgabetermin:*** Mittwoch, 16. Mai 2001, in der Vorlesung