BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

*Fachbereich 7*
**MATHEMATIK**

G. Heindl / P. Feuerstein

**Mathematische Grundlagen der Computergraphik**
(Sommersemester 2001)

**Übungsblatt 12**

$M$ sei ein dreidimensionaler euklidischer Punktraum bezüglich $V$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf $V\times V$, $|\cdot|$ die zugehörige Norm auf $V$, $\times$ ein Vektorprodukt auf $V\times V$, $(O;e_1,e_2,e_3)$ ein cartesisches Koordinatensystem von $M$ mit $e_1\times e_2=e_3$ , $e_2\times e_3=e_1$ und $e_3\times e_1=e_2$ .

Ferner seien für eine Isometrie $\Phi: M\to M$ bekannt:

$$d_i := \left\langle [O,\vec{\Phi}(O)], e_i\right\rangle \ , \ i=1,2,3, \text{ und}$$
$$q_{ij} := \langle L_\Phi(e_j), e_i\rangle \ , \ i,j=1,2,3,$$

also der Koordinatenvektor $d:=(d_1,d_2,d_3)^\top$ von $O,\vec{\Phi}(O)$ bezüglich $(e_1,e_2,e_3)$,
und die Darstellungsmatrix $Q:=(q_{ij})_{i,j=1}^3$ von $L_\Phi$ bezüglich $(e_1,e_2,e_3)$.

- Ist $\Phi$ eigentlich und $L_\Phi\neq \mathrm{id}_V$ , so gibt es nach Lemma V.10 genau ein $\varphi\in\,]0,\pi]$ und ein $w\in V$ mit $|w|=1$ :

$$L_\Phi(v)=\cos(\varphi)\,v+(1-\cos(\varphi))\,\langle v,w\rangle\,w+\sin(\varphi)\,w\times v\quad\forall\, v\in V\ . \tag{$E_e$}$$

  Im Fall $\varphi\neq\pi$ ist auch $w$ eindeutig bestimmt, im Fall $\varphi=\pi$ kann $w$ nur durch $-w$ ersetzt werden.

- Ist $\Phi$ uneigentlich und $L_\Phi\neq -\mathrm{id}_V$ , so gibt es genau ein $\varphi\in[0,\pi[$ und ein $w\in V$ mit $|w|=1$ :

$$L_\Phi(v)=\cos(\varphi)\,v-(1+\cos(\varphi))\,\langle v,w\rangle\,w+\sin(\varphi)\,w\times v\quad\forall\, v\in V\ . \tag{$E_u$}$$

  Im Fall $\varphi\neq 0$ ist auch $w$ eindeutig bestimmt, im Fall $\varphi=0$ kann $w$ nur durch $-w$ ersetzt werden. (Das folgt, wenn man Lemma V.10 auf $-L_\Phi$ anwendet.)

Die folgende Aufgabe zeigt, wie sich $\varphi$ und $w$ aus den $q_{ij}$ berechnen lassen und der Typ von $\Phi$ festgestellt werden kann.

**Aufgabe 1:**

Zeigen Sie:

a) Mit $\varphi\in\,]0,\pi]$ , $c:=\cos(\varphi)$ , $s:=\sin(\varphi)$ und $w=w_1e_1+w_2e_2+w_3e_3$ mit $|w|=1$ folgt aus ($E_e$):

(I) $$Q=\begin{pmatrix} c+(1-c)\,w_1^2 & (1-c)\,w_1w_2-s\,w_3 & (1-c)\,w_1w_3+s\,w_2\\ (1-c)\,w_2w_1+s\,w_3 & c+(1-c)\,w_2^2 & (1-c)\,w_2w_3-s\,w_1\\ (1-c)\,w_3w_1-s\,w_2 & (1-c)\,w_3w_2+s\,w_1 & c+(1-c)\,w_3^2\end{pmatrix}\ .$$

(II) $q_{11}+q_{22}+q_{33}=3c+(1-c)\big(w_1^2+w_2^2+w_3^2\big)=2c+1$ und folglich $c=\frac{1}{2}(q_{11}+q_{22}+q_{33}-1)$ .

(III) $$2s\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_{32}-q_{23}\\q_{13}-q_{31}\\q_{21}-q_{12}\end{pmatrix}\ .$$

(IV) $(q_{32}-q_{23})^2+(q_{13}-q_{31})^2+(q_{21}-q_{12})^2=4s^2=4\big(1-c^2\big)=4-(q_{11}+q_{22}+q_{33}-1)^2$
und folglich $s=\frac{1}{2}\sqrt{(q_{32}-q_{23})^2+(q_{13}-q_{31})^2+(q_{21}-q_{12})^2}$
sowie $(q_{32}-q_{23})^2+(q_{13}-q_{31})^2+(q_{21}-q_{12})^2+(q_{11}+q_{22}+q_{33}-1)^2=4$ .

(V) $Q=Q^\top\ \Leftrightarrow\ s=0\ \Leftrightarrow\ c=-1\ \Leftrightarrow\ \varphi=\pi\ \Leftrightarrow\ q_{11}+q_{22}+q_{33}=-1$
$\Leftrightarrow\ (1+q_{11})+(1+q_{22})+(1+q_{33})=2\ \Leftrightarrow\ F_{-L_\Phi}=\mathrm{span}\{w\}^\perp$.
$Q\neq Q^\top\ \Leftrightarrow\ F_{-L_\Phi}=\{0\}$ .

(VI) $1+q_{ii}\geq 0 \quad \forall\, i\in\{1,2,3\}$ .

(VII) Im Fall $Q=Q^{\top}$ gibt es ein $i\in\{1,2,3\}$ mit $1+q_{ii}\geq\frac{2}{3}$ und für jedes $i\in\{1,2,3\}$, für das $1+q_{ii}>0$ ist, gilt mit $\tilde{w}_i:=\sqrt{\frac{1}{2}(1+q_{ii})}$ , $\tilde{w}_j:=\frac{q_{ij}}{2\tilde{w}_i}\left(=\frac{q_{ji}}{2\tilde{w}_i}\right) \quad \forall\, j\in\{1,2,3\}\backslash\{i\}$ und $\tilde{w}:=\tilde{w}_1e_1+\tilde{w}_2e_2+\tilde{w}_3e_3$ : $w=\tilde{w}$ oder $w=-\tilde{w}$ .

*Bemerkung:* Aus $|\tilde{w}|=1$ folgt bereits, daß

$$\tilde{L}:V\ni v\longmapsto -v+2\,\langle v,\tilde{w}\rangle\,\tilde{w}\in V$$

eine von $\mathrm{id}_V$ verschiedene eigentliche Isometrie mit $\tilde{L}^{\mathrm{ad}}=\tilde{L}$ ist.

b) Mit $\varphi\in[0,\pi[$ , $c:=\cos(\varphi)$ , $s:=\sin(\varphi)$ und $w=w_1e_1+w_2e_2+w_3e_3$ mit $|w|=1$ folgt aus ($E_u$):

(I) $$Q=\begin{pmatrix} c-(1+c)\,w_1^2 & -(1+c)\,w_1w_2-s\,w_3 & -(1+c)\,w_1w_3+s\,w_2\\ -(1+c)\,w_2w_1+s\,w_3 & c-(1+c)\,w_2^2 & -(1+c)\,w_2w_3-s\,w_1\\ -(1+c)\,w_3w_1-s\,w_2 & -(1+c)\,w_3w_2+s\,w_1 & c-(1+c)\,w_3^2\end{pmatrix} .$$

(II) $q_{11}+q_{22}+q_{33}=3c-(1+c)\big(w_1^2+w_2^2+w_3^2\big)=2c-1$ und folglich $c=\frac{1}{2}(q_{11}+q_{22}+q_{33}+1)$ .

(III) $$2s\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_{32}-q_{23}\\q_{13}-q_{31}\\q_{21}-q_{12}\end{pmatrix} .$$

(IV) $(q_{32}-q_{23})^2+(q_{13}-q_{31})^2+(q_{21}-q_{12})^2=4s^2=4\big(1-c^2\big)=4-(q_{11}+q_{22}+q_{33}+1)^2$
und folglich $s=\frac{1}{2}\sqrt{(q_{32}-q_{23})^2+(q_{13}-q_{31})^2+(q_{21}-q_{12})^2}$
sowie $(q_{32}-q_{23})^2+(q_{13}-q_{31})^2+(q_{21}-q_{12})^2+(q_{11}+q_{22}+q_{33}+1)^2=4$ .

(V) $Q=Q^{\top}\ \Leftrightarrow\ s=0\ \Leftrightarrow\ c=1\ \Leftrightarrow\ \varphi=0\ \Leftrightarrow\ q_{11}+q_{22}+q_{33}=1$
$\Leftrightarrow\ (1-q_{11})+(1-q_{22})+(1-q_{33})=2\ \Leftrightarrow\ F_{L_\Phi}=\mathrm{span}\{w\}^{\perp}$.
$Q\neq Q^{\top}\ \Leftrightarrow\ F_{L_\Phi}=\{0\}$ .

(VI) $1-q_{ii}\geq 0 \quad \forall\, i\in\{1,2,3\}$ .

(VII) Im Fall $Q=Q^{\top}$ gibt es ein $i\in\{1,2,3\}$ mit $1-q_{ii}\geq\frac{2}{3}$ und für jedes $i\in\{1,2,3\}$, für das $1-q_{ii}>0$ ist, gilt mit $\tilde{w}_i:=\sqrt{\frac{1}{2}(1-q_{ii})}$ , $\tilde{w}_j:=-\frac{q_{ij}}{2\tilde{w}_i}\left(=-\frac{q_{ji}}{2\tilde{w}_i}\right) \quad \forall\, j\in\{1,2,3\}\backslash\{i\}$ und $\tilde{w}:=\tilde{w}_1e_1+\tilde{w}_2e_2+\tilde{w}_3e_3$ : $w=\tilde{w}$ oder $w=-\tilde{w}$ .

*Bemerkung:* Aus $|\tilde{w}|=1$ folgt bereits, daß

$$\tilde{L}:V\ni v\longmapsto v-2\,\langle v,\tilde{w}\rangle\,\tilde{w}\in V$$

eine von $-\mathrm{id}_V$ verschiedene uneigentliche Isometrie mit $\tilde{L}^{\mathrm{ad}}=\tilde{L}$ ist.

c) $\Phi$ hat genau dann mindestens einen Fixpunkt, wenn es ein $x=(x_1,x_2,x_3)^{\top}\in\mathbb{R}^3$ mit $(I-Q)x=d$ gibt. Dabei bezeichnet $I$ die $(3\times 3)$-Einheitsmatrix.
Für jedes solche $x$ ist $O+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ Fixpunkt von $\Phi$.

**<u>Aufgabe 2:</u>**

Von welchem Typ ist $\Phi$, wenn

a) $$d=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-2&-1\\-1&2&-2\\-2&1&2\end{pmatrix} ,$$

b) $$d=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad Q=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1&4&8\\4&-7&4\\8&4&-1\end{pmatrix} \quad\text{ist?}$$

Bestimmen Sie jeweils auch die $\Phi$ charakterisierenden geometrischen Größen.

**Aufgabe 3:**

Zeigen Sie:

Mit $q_r := \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ und $q_\nu := \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) w$ wird aus ($E_e$)

$$L_\Phi(v) = \left(2q_r^2 - 1\right) v + 2\,\langle v, q_\nu\rangle\, q_\nu + 2\, q_r\, q_\nu \times v \quad \forall\, v \in V\ .$$

Diese Darstellung entspricht der Darstellung von $qvq^{-1}$ in der Aufgabe 1a) des Übungsblattes 11.
Man folgert daraus, daß jede eigentliche Isometrie $\Phi : V \to V$ in der Form $qvq^{-1}$ mit einer normierten Quaternion $q$ dargestellt werden kann ($\mathrm{id}_V = eve^{-1}\ \forall\, v \in V$ !).

**Aufgabe 4:**

$SO(3)$ bezeichne die Menge aller eigentlichen orthogonalen reellen $(3 \times 3)$-Matrizen.
Ferner sei $S_3 := \left\{ q \in \mathbb{R}^4 \,:\, |q| \left(:= \sqrt{q^\top q}\right) = 1 \right\}$ und

$$E(q) := \begin{pmatrix} 2\left(q_4^2 + q_1^2\right) - 1 & 2(q_2 q_1 - q_4 q_3) & 2(q_3 q_1 + q_4 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_4 q_3) & 2\left(q_4^2 + q_2^2\right) - 1 & 2(q_3 q_2 - q_4 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_4 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_4 q_1) & 2\left(q_4^2 + q_3^2\right) - 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^\top \in S_3\ .$$

Zeigen Sie:

a) $E(q) \in SO(3) \quad \forall\, q \in S_3$ .
b) $\forall\, M \in SO(3) \quad \exists\, q \in S_3 \ :\ E(q) = M$ .
c) $E(q) = E(\tilde{q}) \ \Leftrightarrow\ \tilde{q} = q$ oder $\tilde{q} = -q$ .

*Hinweis:* Einfache Rechnung zeigt: Definiert man $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^\top$ zu den in der Aufgabe 3 eingeführten Größen $q_\nu$ und $q_r$ durch $q_i := \langle q_\nu, e_i\rangle$ , $i = 1, 2, 3$, und $q_4 := q_r$ , so ist $q \in S_3$ und $Q = E(q)$ .
Zum Nachweis der Orthogonalität von $E(q)$ und von c) kann man den Quaternionenkalkül im „Standardfall“ $H = \mathbb{R}^4$ , $e = (0, 0, 0, 1)^\top$ und

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$$

heranziehen, insbesondere die Rechenregel $|ab| = |a||b| \quad \forall\, a, b \in H$ und das Ergebnis der Aufgabe 1 des Übungsblattes 11.
Zum Nachweis von $\det(E(q)) = 1 \quad \forall\, q \in S_3$ betrachte man zu linear unabhängigen $q, \tilde{q} \in S_3$ und $\alpha := \sphericalangle(\tilde{q}, q) \in\, ]0, \pi[$ die stetige Abbildung

$$h : [0, \alpha] \ni t \longmapsto \frac{\sin(\alpha - t)}{\sin(\alpha)}\, \tilde{q} + \frac{\sin(t)}{\sin(\alpha)}\, q \in \mathbb{R}^4\ , \qquad (*)$$

für die $h(0) = \tilde{q}$ , $h(\alpha) = q$ und $h([0, \alpha]) \subset S_3$ gilt (vgl. Aufgabe 3 auf Übungsblatt 3 !).

$$d : [0, \alpha] \ni t \longmapsto \det(E(h(t))) \in \mathbb{R}$$

ist dann eine stetige Funktion mit $d([0, \alpha]) \subset \{-1, 1\}$ . Wählt man $\tilde{q} = e$ , so ist

$$d(0) = \det(E(e)) = \det(I) = 1\ .$$

$(*)$ Diese Abbildung bildet auch die Grundlage für die Interpolation von Momentaufnahmen bewegter Körper!

***Dieses Übungsblatt wird nicht mehr in den Übungen besprochen!***