BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Mathematische Grundlagen der Computergraphik

(Sommersemester 2001)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1:

Mit den im Übungsblatt 10 eingeführten Bezeichnungen seien $p, q \in H$ mit $|p| = |q| = 1$, $w \in V\backslash\{0\}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ und

$$q(w,\varphi) := \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{1}{|w|}w \ \ (\in H) \ .$$

Zeigen Sie:

a) $\forall\ v \in V$ ist

$$qvq^{-1} = \Big(2\langle q,e\rangle^2 - 1\Big)v + 2\langle v,\nu(q)\rangle\nu(q) + 2\langle q,e\rangle\nu(q) \times v \ .$$

Hinweis: Benutzen Sie die in den Aufgaben des Übungsblattes 10 nachzuweisenden Rechenregeln, insbesondere die Regel $uv = -\langle u,v\rangle e + u \times v \quad \forall\, u,v \in V$.

b) Aus $pvp^{-1} = qvq^{-1} \quad \forall\ v \in V$ folgt $p \in \{-q, q\}$.
Hinweis: $pvp^{-1} = qvq^{-1} \ \forall\ v \in V \ \Rightarrow \ \big(p^{-1}q\big)v\big(p^{-1}q\big)^{-1} = v$ insbesondere für ein $v \in V\backslash\{0\}$ mit $\big\langle v, \nu\big(p^{-1}q\big)\big\rangle = 0$.
Versuchen Sie daraus mit Hilfe von a) zu folgern, daß $p^{-1}q = \pm e$ gilt!

c) Es gilt $|q(w,\varphi)| = 1$, und $\forall\ v \in V$ ist

$$L(v) := q(w,\varphi)\ v\ q(w,\varphi)^{-1} = \cos(\varphi)v + (1-\cos(\varphi))\frac{\langle v,w\rangle}{|w|^2}w + \sin(\varphi)\frac{w}{|w|} \times v \ .$$

Bemerkung: Identifiziert man V mit dem Vektorraum der Translationen eines dreidimensionalen euklidischen Punktraumes M, so ist $L(v) = L_{R_{(P_0,w,\varphi)}}(v) \quad \forall\ v \in V$ und $P_0 \in M$!

Aufgabe 2:

$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei eigentlich orthogonal mit $a_{13}^2 + a_{23}^2 > 0$.

Zeigen Sie:

a) $w := \sqrt{1 - a_{33}^2} > 0$.

b) $\exists_1\ \varphi \in\ ]-\pi,\pi] : \cos(\varphi) = -\frac{a_{23}}{w}$ und $\sin(\varphi) = \frac{a_{13}}{w}$.

c) $\exists_1\ \vartheta \in [0,\pi] : \cos(\vartheta) = a_{33}$ und $\sin(\vartheta) = w\ (>0)$. (Wegen $|a_{33}| < 1$ ist $\vartheta \in\ ]0,\pi[$!)

d) $\exists_1\ \psi \in\ ]-\pi,\pi] : \cos(\psi) = \frac{a_{32}}{w}$ und $\sin(\psi) = \frac{a_{31}}{w}$.

e) Mit

$$R(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{und} \ M(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

gilt $R(\varphi)M(\vartheta)R(\psi) = A$. (Zeigen Sie dazu: $B := R(\varphi)^{-1}AR(\psi)^{-1} = R(\varphi)^{\top}AR(\psi)^{\top} = M(\vartheta)$!)

Bemerkung: φ, ϑ, ψ heißen *Eulersche Winkel* von A.
Im Fall $a_{13}^2 + a_{23}^2 = 0$ ist mit einem $\alpha \in\ ]-\pi,\pi]$ entweder

$$A = R(\alpha)\ (= R(0)M(0)R(\alpha)) \ \text{ oder } \ A = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (= R(\pi)M(\pi)R(\alpha)) \ .$$

Eindeutig bestimmte Eulersche Winkel gibt es dann aber nicht!

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

eigentlich orthogonal ist und bestimmen Sie ihre Eulerschen Winkel.

Versuchen Sie, auf A auch das auf den Seiten 68–69 der Analytischen Geometrie von G. Fischer hergeleitete Verfahren zur Bestimmung der dort mit α, β, γ bezeichneten Winkel anzuwenden!

Aufgabe 4:

M sei ein n-dimensionaler affiner Punktraum bezüglich V, $\mathfrak{A} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $(l_1, \ldots, l_n)$ die zugehörige duale Basis von V^*.

Unter einer Skalierung bezüglich $\mathfrak{A}$ versteht man eine Abbildung

$$S : M \ni P \longmapsto Q_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j l_j(\vec{Q_0P}) v_j \in M$$

mit $Q_0 \in M$ und $s_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$.

a) Zeigen Sie, daß jede Skalierung S bezüglich $\mathfrak{A}$ eine eigentliche Affinität ist. Verifizieren Sie dazu:

- S ist affin.
- $L_S(v) = \sum_{j=1}^{n} s_j l_j(v) v_j \quad \forall\, v \in V$, insbesondere $L_S(v_i) = s_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$.
- $M_{\mathfrak{A}}(L_S) = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n)$.
- $\det(L_S) = \prod_{i=1}^{n} s_i \quad (> 0)$.

b) $\Phi : M \to M$ sei eine Affinität, d.h. Φ sei affin und $A := M_{\mathfrak{A}}(L_\Phi)$ regulär. Da dann $A^\top A$ symmetrisch und positiv definit ist, gibt es positive $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^\top A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) U^\top$. Zeigen Sie:

- U kann eigentlich orthogonal gewählt werden (und sei im folgenden auch so gewählt).
- Mit $D := \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ ist $W := AUD^{-1}$ orthogonal mit $\det(W) = \operatorname{sign}(\det(A))$.
- $WDU^\top = A$.

c) Zusätzlich sei jetzt M euklidisch und $\mathfrak{A}$ eine Orthonormalbasis von V. Die affinen Abbildungen $R, S, T : M \to M$ seien so gewählt, daß gilt:

$$M_{\mathfrak{A}}(L_R) = U^\top \;\;,\;\; M_{\mathfrak{A}}(L_S) = D \;\;,\;\; M_{\mathfrak{A}}(L_T) = W$$

und

$$\begin{aligned} R(P) &= P_0 + L_R(\vec{P_0P}) + v_R \;, \\ S(P) &= Q_0 + L_S(\vec{Q_0P}) + v_S \;, \\ T(P) &= O_0 + L_T(\vec{O_0P}) + v_T \quad \forall\, P \in M \;, \end{aligned}$$

wobei $P_0, Q_0, O_0 \in M$ und $v_R, v_S, v_T \in V$ der (erfüllbaren!) Bedingung

$$[O_0, \vec{\Phi}(P_0)] = L_T\left(\vec{O_0Q_0} + v_S + L_S\left(\vec{Q_0P_0} + v_R\right)\right) + v_T$$

genügen. Zeigen Sie:

- R ist eine eigentliche Isometrie, S eine Skalierung bezüglich $\mathfrak{A}$ und T eine Isometrie mit $\det(L_T) = \operatorname{sign}(\det(L_\Phi))$.
- $\Phi = T \circ S \circ R$.

Folglich kann jede Affinität durch Komposition von Isometrien und Skalierungen bezüglich einer beliebig vorgegebenen Orthonormalbasis von V erzeugt werden!

Abgabetermin: Mittwoch, 18. Juli 2001, in der Vorlesung