BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Mathematische Grundlagen der Computergraphik
(Sommersemester 2001)

Übungsblatt 10

H sei ein vierdimensionaler euklidischer Vektorraum, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf $H \times H$ und $|\cdot|$ die zugehörige Norm auf H. Weiter sei

- $e \in H : \ |e| = 1$,
- $V := \{a \in H : \langle a, e\rangle = 0\} \ \left(= \mathrm{span}\{e\}^{\perp}\right)$,
- $\times$ eines der beiden Vektorprodukte (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle|V \times V$) auf $V \times V$ ($\mathrm{Dim}V = 3$!),
- $r : H \ni a \longmapsto \langle a, e\rangle e \in H$,
- $\nu : H \ni a \longmapsto a - r(a) = a - \langle a, e\rangle e \in H$,
- $\overline{a} := r(a) - \nu(a) = 2\langle a, e\rangle e - a \ \ (\in H) \quad \forall\, a \in H$,
- $ab := (2\langle a, e\rangle\langle b, e\rangle - \langle a, b\rangle)e + \langle b, e\rangle\nu(a) + \langle a, e\rangle\nu(b) + \nu(a) \times \nu(b) \ \ (\in H) \quad \forall\, a, b \in H$, und
- $a^{-1} := \frac{1}{|a|^2}\,\overline{a} \ \ (\in H) \quad \forall\, a \in H\backslash\{0\}$ (wobei 0 den Nullvektor in H bezeichnet).

Die nachfolgenden Aufgaben führen in die Grundlagen des Quaternionenkalküls ein.

Aufgabe 1:

Verifizieren Sie:

a) $r,\ \nu$ sind linear, $r + \nu = \mathrm{id}_H$,
$\overline{\lambda a + \mu b} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} \quad \forall\, a, b \in H,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) $r(\nu(a)) = \nu(r(a)) = 0 \quad \forall\, a \in H$,
$r^2 = r$, $\nu^2 = \nu$.

c) $\langle r(a), \nu(b)\rangle = 0 \quad \forall\, a, b \in H$,
$|a|^2 = \langle a, e\rangle^2 + |\nu(a)|^2 \quad \forall\, a \in H$.

d) $a \in \mathrm{span}\{e\} \ \Leftrightarrow \ r(a) = a \ \Leftrightarrow \ \nu(a) = 0$,
$a \in V \ \Leftrightarrow \ \nu(a) = a \ \Leftrightarrow \ r(a) = 0$,
$r(H) = \mathrm{span}\{e\}$, $\nu(H) = V$.

e) $r(a) = \frac{1}{2}(a + \overline{a})$, $\nu(a) = \frac{1}{2}(a - \overline{a})$, $r(\overline{a}) = r(a)$, $\nu(\overline{a}) = -\nu(a)$ und $\overline{\overline{a}} = a \quad \forall\, a \in H$.
$a \in \mathrm{span}\{e\} \ \Leftrightarrow \ a = \overline{a}$,
$a \in V \ \Leftrightarrow \ a = -\overline{a}$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie:

a) $ba = ab - 2(\nu(a) \times \nu(b))$ (i.a. also $ab \neq ba$) $\forall\, a, b \in H$.

b) $(\lambda a + \mu b)c = \lambda(ac) + \mu(bc)$ und $c(\lambda a + \mu b) = \lambda(ca) + \mu(cb) \quad \forall\, a, b, c \in H,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall\, a \in H$.

d) $ae = ea = a \quad \forall\, a \in H$.

e) $uv = -\langle u, v\rangle e + u \times v \quad \forall\, u, v \in V$.

f) $a\overline{a} = \overline{a}a = |a|^2 e$, $aa = -|a|^2 e \quad \forall\, a \in H$.

g) $aa^{-1} = a^{-1}a = e \quad \forall\, a \in H\backslash\{0\}$.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie:

a) $\langle \nu(a), \nu(b) \rangle = \langle a, b \rangle - \langle a, e \rangle \langle b, e \rangle$ (und folglich $2\langle a, e \rangle \langle b, e \rangle - \langle a, b \rangle = \langle a, e \rangle \langle b, e \rangle - \langle \nu(a), \nu(b) \rangle$) $\forall\, a, b \in H$.

b) $a(bc) = (ab)c \quad \forall\, a, b, c \in H$.

c) $ab \neq 0 \quad \forall\, a, b \in H \backslash \{0\}$.

d) Aus $ab = e$ folgt $a = b^{-1}$ und $b = a^{-1}$.

Hinweis: b) kann mit Hilfe von a), Rechenregeln aus den Aufgaben 1 und 2 und den früher abgeleiteten Rechenregeln

$$\langle u \times v, w \rangle = \langle v \times w, u \rangle = \langle u, v \times w \rangle \,,$$
$$(u \times v) \times w = \langle w, u \rangle v - \langle v, w \rangle u \,,$$
$$u \times (v \times w) = \langle w, u \rangle v - \langle u, v \rangle w \quad \forall\, u, v, w \in V$$

nachgewiesen werden.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie:

a) $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a} \quad \forall\, a, b \in H$.

b) $|ab| = |a||b| \quad \forall\, a, b \in H$.

c) $\langle ab, ac \rangle = \langle ba, ca \rangle = |a|^2 \langle b, c \rangle \quad \forall\, a, b, c \in H$.

Hinweis: c) kann aus b) gefolgert werden, indem man $\langle ab + ac, ab + ac \rangle$ (bzw. $\langle ba + ca, ba + ca \rangle$) auf zwei verschiedene Arten umformt. (Umgekehrt folgt b) aus c) mit $c = b$!)

Bemerkung: Aus Aufgabe 2 b), d) und g) und Aufgabe 3 b) folgt, daß H mit den Verknüpfungen

$$H \times H \ni (a, b) \longmapsto a + b \in H \,,$$
$$\mathbb{R} \times H \ni (\lambda, a) \longmapsto \lambda a \in H \,,$$
$$H \times H \ni (a, b) \longmapsto ab \in H$$

eine reelle assoziative Divisionsalgebra mit dem Einselement e ist. In diesem Zusammenhang bezeichnet man die Elemente von H auch als *Quaternionen*. $\overline{a}$ heißt das zu $a \in H$ *konjugierte* Quaternion, $r(a)$ der *reelle* (oder *skalare*) *Anteil*, $\nu(a)$ der *vektorielle Anteil* von $a \in H$ (H nach Sir William Rowan Hamilton, der die Quaternionen, die 1748 von Leonhard Euler eingeführt wurden, 1843 wiederentdeckte).

Man kann zeigen, daß je zwei vierdimensionale reelle assoziative Divisionsalgebren H_1, H_2 isomorph sind (d.h. daß eine verknüpfungstreue Bijektion von H_1 auf H_2 (H_2 auf H_1) existiert).
Andere endlichdimensionale reelle assoziative Divisionsalgebren sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Nach einem Satz von Frobenius sind dies (bis auf Isomorphie) die einzigen neben H.

Im „Standardfall“ ist $H = \mathbb{R}^4$ und $e = (0, 0, 0, 1)^\top$.

Abgabetermin: Mittwoch, 11. Juli 2001, in der Vorlesung