BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Klausur

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Bestimmen Sie die periodische Grenzlösung $\psi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = r$$

für

$$r(t) := -30\ \sqrt{2}\ \cos(3t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\ .$$

Anleitung: $\psi_0(t) = A\ \cos(3t + \delta)$ mit $A > 0$ und $\delta \in]0, 2\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$. $A = ?$. $\delta = ?$.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$k : \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ni x \longmapsto \frac{\sin\left(\|x\|_2\right)}{\|x\|_2}\, x \in \mathbb{R}^3\ .$$

Zeigen Sie, daß k konservativ ist, indem Sie ein Potential ψ von k bestimmen, also ein ψ mit $k = -\mathrm{grad}\psi$.

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Zeigen Sie:

a)

$$T : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

ist eine kontrahierende Abbildung von $\mathbb{R}$ in sich mit der Kontraktionskonstanten 0.5 .

b) Es gibt genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit

$$\cos\left(\frac{x^*}{2}\right) = x^*\ .$$

c) Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge

$$\{x_i := T(x_{i-1})\}_{i \in \mathbb{N}}$$

gegen x^*.

d) Berechnen Sie zu $x_0 := 0$ (näherungsweise) x_7 mit dem Taschenrechner und schätzen Sie (näherungsweise) $|x_7 - x^*|$ ab.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y \ ,$$
$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 5: (18 Punkte)

Bestimmen Sie die singulären Stellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 \, x_2 \, (x_1 + x_2 - 3) \in \mathbb{R} \ .$$

Welche dieser Stellen sind

- strenge lokale Minimalstellen, welche
- strenge lokale Maximalstellen und welche
- Sattelpunkte

von f ?

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Gegeben seien das Vektorfeld

$$k : \mathbb{R}^3 \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2^2 \\ x_1 x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und die Integrationswege

$$\gamma_1 : [0,1] \ni t \longmapsto t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und}$$
$$\gamma_2 : [0,1] \ni t \longmapsto t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ .$$

a) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma_1} k \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_2} k \ .$$

b) Berechnen Sie $\mathrm{div} k$ und die Komponenten von $\mathrm{rot} k$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

c) Ist k konservativ?

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.