BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1:

V sei ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum, „$\times$“ ein Vektorprodukt auf $V \times V$.

Zeigen Sie:

a) Zu jeder alternierenden Bilinearform $A : V \times V \to \mathbb{R}$ gibt es genau einen Vektor $v_A \in V$, mit dem gilt:

$$A(v_1, v_2) = \langle v_1 \times v_2, v_A \rangle \quad \forall\, (v_1, v_2) \in V \times V. \tag{1}$$

Anleitung:
(e_1, e_2, e_3) sei eine Orthonormalbasis von V mit $e_1 \times e_2 = e_3$ ($\Rightarrow e_2 \times e_3 = e_1,\ e_3 \times e_1 = e_2$).
Zeigen Sie, daß dann (1) mit

$$v_A := A(e_2, e_3)e_1 + A(e_3, e_1)e_2 + A(e_1, e_2)e_3$$

gilt und daß aus

$$\left\langle v_1 \times v_2, v_A - v'_A \right\rangle = 0 \quad \forall\, (v_1, v_2) \in V \times V$$

folgt:

$$\left\langle e_i, v_A - v'_A \right\rangle = 0,\ i = 1, 2, 3, \text{ also } v_A = v'_A.$$

b) Für alle $L \in \mathcal{L}(V)$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ gilt:

$$\langle L(v_1) \times v_2 - L(v_2) \times v_1, v_3 \rangle = \langle v_1 \times v_2, \mathrm{Spur}(L)\, v_3 - L(v_3) \rangle\ .$$

Anleitung:
Bei festem $v_3 \in V$ ist

$$A_{v_3} : V \times V \ni (v_1, v_2) \longmapsto \langle L(v_1) \times v_2 - L(v_2) \times v_1, v_3 \rangle \in \mathbb{R}$$

eine alternierende Bilinearform. Zeigen Sie, daß gilt:

$$v_{A_{v_3}} = \mathrm{Spur}(L)\, v_3 - L(v_3)\ .$$

Aufgabe 2:

V sei ein euklidischer Vektorraum, $U \subset V$, U offen, $k : U \to V$ differenzierbar.

Dann definiert man für jedes $x \in U$ die alternierende Bilinearform $\mathrm{Rot}k(x)$ auf $V \times V$ durch

$$\mathrm{Rot}k(x)(v_1, v_2) := \langle Dk(x)(v_1), v_2 \rangle - \langle Dk(x)(v_2), v_1 \rangle \quad \forall\, (v_1, v_2) \in V \times V\ .$$

Ist im Fall $\mathrm{Dim}V = 3$ „$\times$“ ein Vektorprodukt auf $V \times V$, so gibt es nach Aufgabe 1 a) zu jedem $x \in U$ einen eindeutig bestimmten Vektor $\mathrm{rot}k(x) \in V$, für den gilt:

$$\mathrm{Rot}k(x)(v_1, v_2) = \langle v_1 \times v_2, \mathrm{rot}k(x) \rangle \quad \forall\, (v_1, v_2) \in V \times V\ .$$

Die Abbildung $\mathrm{rot}k : U \ni x \longmapsto \mathrm{rot}k(x) \in V$ heißt *Rotation* von k.

Zeigen Sie:

a) Ist im Fall $\mathrm{Dim}V = 3$ „$\times$“ ein Vektorprodukt auf $V \times V$ und (e_1, e_2, e_3) eine Orthonormalbasis von V mit $e_1 \times e_2 = e_3$ ($\Rightarrow e_2 \times e_3 = e_1,\ e_3 \times e_1 = e_2$), so gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,k(x) =&(\langle Dk(x)(e_2), e_3\rangle - \langle Dk(x)(e_3), e_2\rangle)\, e_1 + \\ &(\langle Dk(x)(e_3), e_1\rangle - \langle Dk(x)(e_1), e_3\rangle)\, e_2 + \\ &(\langle Dk(x)(e_1), e_2\rangle - \langle Dk(x)(e_2), e_1\rangle)\, e_3 \qquad \forall\, x \in U\ .\end{aligned} \tag{2}$$

Bemerkung:
Ist $V = \mathbb{R}^3$, „$\times$“ das auf die Standardbasis bezogene Vektorprodukt und

$$k(x) = (k_1(x), k_2(x), k_3(x))^\top \quad \forall\, x \in U\ ,$$

so ist (2) äquivalent mit

$$\mathrm{rot}\,k(x) = \begin{pmatrix}\partial_2 k_3(x) - \partial_3 k_2(x)\\ \partial_3 k_1(x) - \partial_1 k_3(x)\\ \partial_1 k_2(x) - \partial_2 k_1(x)\end{pmatrix} \quad \forall\, x \in U\ .$$

b) Ist $\mathrm{Dim}V = 2$ und $\varepsilon : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Determinantenform, so gibt es eine eindeutig bestimmte (von ε abhängige) reelle Zahl $\mathrm{rot}\,k(x)$, für die gilt:

$$\mathrm{Rot}\,k(x) = \mathrm{rot}\,k(x)\,\varepsilon \quad \forall\, x \in U\ .$$

Für jedes $(e_1, e_2) \in V \times V$ mit $\varepsilon(e_1, e_2) = 1$ ist dann

$$\mathrm{rot}\,k(x) = \langle Dk(x)(e_1), e_2\rangle - \langle Dk(x)(e_2), e_1\rangle \quad \forall\, x \in U\ . \tag{3}$$

Bemerkung:
Ist $V = \mathbb{R}^2$, ε die auf die Standardbasis bezogene Determinantenform und

$$k(x) = (k_1(x), k_2(x))^\top \quad \forall\, x \in U\ ,$$

so ist (3) äquivalent mit

$$\mathrm{rot}\,k(x) = \partial_1 k_2(x) - \partial_2 k_1(x) \quad \forall\, x \in U\ .$$

Aufgabe 3:

V sei ein euklidischer Vektorraum, $U \subset V$, U offen, $f, g, h : U \to \mathbb{R}$ und $k : U \to V$ seien differenzierbar.

Dann sind auch

$$\begin{aligned}fgh &: U \ni x \longmapsto f(x)g(x)h(x) \in \mathbb{R} \ \text{ und}\\ fk &: U \ni x \longmapsto f(x)k(x) \in V\end{aligned}$$

differenzierbar.

Zeigen Sie, daß für alle $x \in U$ gilt:

a)

$$\mathrm{grad}(fgh)(x) = g(x)h(x)\mathrm{grad}\,f(x) + h(x)f(x)\mathrm{grad}\,g(x) + f(x)g(x)\mathrm{grad}\,h(x)\ .$$

b)

$$\mathrm{div}(fk)(x) = \langle \mathrm{grad} f(x), k(x) \rangle + f(x) \mathrm{div} k(x) \; .$$

Anleitung:
Ist $v \in V$ und $l \in V^*$, so gilt für die lineare Abbildung

$$L : V \ni h \longmapsto l(h)v \in V$$

$$\mathrm{Spur}(L) = l(v) \; .$$

Ist nämlich $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von V und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die zugehörige duale Basis von V^*, so ist (nach Aufgabe 1 / Blatt 12)

$$\mathrm{Spur}(L) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(L(v_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(l(v_i)v) = \sum_{i=1}^{n} l(v_i)\lambda_i(v) = l\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) v_i \right) = l(v) \; .$$

Aufgabe 4:

V sei ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum, „$\times$“ ein Vektorprodukt auf $V \times V$, $U \subset V$, U offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $k, k_1, k_2 : U \to V$ seien differenzierbar.

Dann sind auch

$$\begin{aligned} fk &: U \ni x \longmapsto f(x)k(x) \in V \; , \\ \langle k_1, k_2 \rangle &: U \ni x \longmapsto \langle k_1(x), k_2(x) \rangle \in \mathbb{R} \text{ und} \\ k_1 \times k_2 &: U \ni x \longmapsto k_1(x) \times k_2(x) \in V \end{aligned}$$

differenzierbar.

Zeigen Sie, daß für alle $x \in U$ gilt:

a)

$$\mathrm{rot}(fk)(x) = f(x)\mathrm{rot} k(x) + \mathrm{grad} f(x) \times k(x) \; .$$

b)

$$\mathrm{grad}\langle k_1, k_2 \rangle(x) = k_1(x) \times \mathrm{rot} k_2(x) + k_2(x) \times \mathrm{rot} k_1(x) + Dk_1(x)(k_2(x)) + Dk_2(x)(k_1(x)) \; .$$

c)

$$\mathrm{div}(k_1 \times k_2)(x) = \langle k_2(x), \mathrm{rot} k_1(x) \rangle - \langle k_1(x), \mathrm{rot} k_2(x) \rangle \; .$$

Anleitung:
Zeigen Sie zuerst: Ist $k : U \to V$ differenzierbar, $x \in U$ und $w \in V$, so gilt für die lineare Abbildung

$$L : V \ni v \longmapsto Dk(x)(v) \times w \in V$$

$$\mathrm{Spur}(L) = \langle w, \mathrm{rot} k(x) \rangle \; .$$

d)

$$\mathrm{rot}(k_1 \times k_2)(x) = Dk_1(x)(k_2(x)) - \mathrm{div} k_1(x) k_2(x) - Dk_2(x)(k_1(x)) - \mathrm{div} k_2(x) k_1(x) \; .$$

Anleitung:
Verwenden Sie die in Aufgabe 1 b) zu beweisende Identität.

Aufgabe 5:

V sei ein euklidischer Vektorraum, $U \subset V$, U offen.

Zeigen Sie:

a) Für alle $\varphi, \psi \in C^2(U)$ ist

$$\varphi\psi : U \ni x \longmapsto \varphi(x)\psi(x) \in \mathbb{R}$$

in $C^2(U)$ und es gilt:

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\langle \mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\psi \rangle \ .$$

b) Für jedes $\varphi \in C^2(U)$ gilt:

$$\mathrm{Rot}\,\mathrm{grad}\varphi = 0 \ .$$

(In den Fällen $\mathrm{Dim}V = 2$ und $\mathrm{Dim}V = 3$ ist dies äquivalent mit $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\varphi = 0$.)

c) Im Fall $\mathrm{Dim}V = 3$ gilt für jedes $k \in C^2(U, V)$:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}k = 0 \ .$$

Aufgabe 6:

V sei ein euklidischer Vektorraum, $U \subset V$, U offen und $k \in C^2(U, V)$.

Dann ist für jedes $v \in V$

$$k_v : U \ni x \longmapsto \langle k(x), v \rangle \in \mathbb{R}$$

in $C^2(U)$ und für jedes $x \in U$

$$l_x : V \ni v \longmapsto \mathrm{div}(\mathrm{grad}k_v)(x) = \Delta k_v(x) \in \mathbb{R}$$

in V^*. Es gibt daher eine eindeutig bestimmte Abbildung $\Delta k \in C(U, V)$ mit

$$\langle \Delta k(x), v \rangle \ (= l_x(v)) \ = \Delta k_v(x) \quad \forall\, x \in U \text{ und } v \in V \ .$$

Zeigen Sie:

a) Für jede Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von V gilt:

$$\Delta k(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{e_i, e_i} k(x) \quad \forall\, x \in U \ .$$

b) Im Fall $\mathrm{Dim}V = 3$ gilt:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}k) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}k) - \Delta k \ .$$

Abgabetermin: Freitag, 5. Februar 1998.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Sei

$$v_A := A(e_2,e_3)\,e_1 + A(e_3,e_1)\,e_2 + A(e_1,e_2)\,e_3\,,$$

$$v_1, v_2 \in V \;\Rightarrow\; v_1 = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\langle e_i, v_1\rangle}_{v_{1i}} e_i,\; v_2 = \sum_{j=1}^{3} \underbrace{\langle e_j, v_2\rangle}_{v_{2j}} e_j$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\; v_1 \times v_2 &= \sum_{i,j=1}^{3} v_{1i}v_{2j}(e_i \times e_j)\\ &= (v_{12}v_{23} - v_{13}v_{22})\,e_1 + (v_{13}v_{21} - v_{11}v_{23})\,e_2 + (v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21})\,e_3\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}e_2 \times e_3 &= -e_3 \times e_2 = e_1\,,\\ e_3 \times e_1 &= -e_1 \times e_3 = e_2\,,\\ e_1 \times e_2 &= -e_2 \times e_1 = e_3\,,\\ e_i \times e_i &= 0,\; i = 1,2,3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\; \langle v_1 \times v_2, v_A\rangle =& A(e_2,e_3)(v_{12}v_{23} - v_{13}v_{22}) +\\ & A(e_3,e_1)(v_{13}v_{21} - v_{11}v_{23}) +\\ & A(e_1,e_2)(v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}) =: r\end{aligned}$$

Andererseits:

$$A(v_1,v_2) = A\left(\sum_{i=1}^{3} v_{1i}e_i, \sum_{j=1}^{3} v_{2j}e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{3} v_{1i}v_{2j}A(e_i,e_j) = r$$

wegen

$$A(e_i,e_j) = -A(e_j,e_i),\; i,j = 1,2,3,\; \text{insbesondere } A(e_i,e_i) = 0,\; i = 1,2,3.$$

b) Mit

$$A_{v_3} : V \times V \ni (v_1,v_2) \longmapsto \langle L(v_1) \times v_2 - L(v_2) \times v_1, v_3\rangle \in \mathbb{R}$$

ist nach a)

$$\begin{aligned}v_{A_{v_3}} =& A_{v_3}(e_2,e_3)\,e_1 + A_{v_3}(e_3,e_1)\,e_2 + A_{v_3}(e_1,e_2)\,e_3\\ =& \langle L(e_2) \times e_3 - L(e_3) \times e_2, v_3\rangle\, e_1 +\\ & \langle L(e_3) \times e_1 - L(e_1) \times e_3, v_3\rangle\, e_2 +\\ & \langle L(e_1) \times e_2 - L(e_2) \times e_1, v_3\rangle\, e_3\,.\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}&\langle L(e_2) \times e_3 - L(e_3) \times e_2, v_3\rangle\\ &\quad= \langle L(e_2) \times e_3, v_3\rangle - \langle L(e_3) \times e_2, v_3\rangle\\ &\qquad\text{(Vertauschungsregel:)}\\ &\quad= \langle e_3 \times v_3, L(e_2)\rangle - \langle e_2 \times v_3, L(e_3)\rangle\\ &\qquad(v_3 = \langle e_1,v_3\rangle e_1 + \langle e_2,v_3\rangle e_2 + \langle e_3,v_3\rangle e_3)\\ &\quad= \langle \langle e_1,v_3\rangle e_2 - \langle e_2,v_3\rangle e_1, L(e_2)\rangle - \langle -\langle e_1,v_3\rangle e_3 + \langle e_3,v_3\rangle e_1, L(e_3)\rangle\\ &\quad= \langle e_1,v_3\rangle(\langle e_1,L(e_1)\rangle + \langle e_2,L(e_2)\rangle + \langle e_3,L(e_3)\rangle) -\\ &\qquad(\langle e_1,v_3\rangle\langle e_1,L(e_1)\rangle + \langle e_2,v_3\rangle\langle e_1,L(e_2)\rangle + \langle e_3,v_3\rangle\langle e_1,L(e_3)\rangle)\\ &\quad= \langle e_1,v_3\rangle \mathrm{Spur}(L) - \left\langle e_1, L\left(\sum_{i=1}^{3}\langle e_i,v_3\rangle e_i\right)\right\rangle = \langle e_1,v_3\rangle\mathrm{Spur}(L) - \langle e_1, L(v_3)\rangle\,.\end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\langle L(e_3)\times e_1 - L(e_1)\times e_3, v_3\rangle = \langle e_2, v_3\rangle \mathrm{Spur}(L) - \langle e_2, L(v_3)\rangle \text{ und}$$
$$\langle L(e_1)\times e_2 - L(e_2)\times e_1, v_3\rangle = \langle e_3, v_3\rangle \mathrm{Spur}(L) - \langle e_3, L(v_3)\rangle \ .$$

Damit ist aber

$$\begin{aligned} v_{A_{v_3}} &= (\langle e_1, v_3\rangle \mathrm{Spur}(L) - \langle e_1, L(v_3)\rangle)\, e_1 + \\ &\quad (\langle e_2, v_3\rangle \mathrm{Spur}(L) - \langle e_2, L(v_3)\rangle)\, e_2 + \\ &\quad (\langle e_3, v_3\rangle \mathrm{Spur}(L) - \langle e_3, L(v_3)\rangle)\, e_3 \\ &= \mathrm{Spur}(L)(\langle e_1, v_3\rangle e_1 + \langle e_2, v_3\rangle e_2 + \langle e_3, v_3\rangle e_3) - \\ &\quad (\langle e_1, L(v_3)\rangle e_1 + \langle e_2, L(v_3)\rangle e_2 + \langle e_3, L(v_3)\rangle e_3) \\ &= \mathrm{Spur}(L) v_3 - L(v_3) \ . \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \langle e_1, \mathrm{rot}k(x)\rangle &= \langle e_2\times e_3, \mathrm{rot}k(x)\rangle \\ &= \mathrm{Rot}k(x)(e_2, e_3) = \langle Dk(x)(e_2), e_3\rangle - \langle Dk(x)(e_3), e_2\rangle \ , \\ \langle e_2, \mathrm{rot}k(x)\rangle &= \langle e_3\times e_1, \mathrm{rot}k(x)\rangle \\ &= \mathrm{Rot}k(x)(e_3, e_1) = \langle Dk(x)(e_3), e_1\rangle - \langle Dk(x)(e_1), e_3\rangle \text{ und} \\ \langle e_3, \mathrm{rot}k(x)\rangle &= \langle e_1\times e_2, \mathrm{rot}k(x)\rangle \\ &= \mathrm{Rot}k(x)(e_1, e_2) = \langle Dk(x)(e_1), e_2\rangle - \langle Dk(x)(e_2), e_1\rangle \ . \end{aligned}$$

b) Da alle n-linearen alternierenden Formen auf V^n bis auf einen reellen Faktor übereinstimmen, folgt sofort die Behauptung ($\mathrm{Dim}V = n = 2$!).

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Aus der Produktregel folgt $\forall\, x \in U,\ v \in V$:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{grad}(fgh)(x), v\rangle &= D(fgh)(x)(v) \\ &= D(f(gh))(x)(v) \\ &= Df(x)(v)(gh)(x) + f(x)D(gh)(x)(v) \\ &= Df(x)(v)(gh)(x) + f(x)(Dg(x)(v)h(x) + g(x)Dh(x)(v)) \\ &= g(x)h(x)\underbrace{Df(x)(v)}_{\langle \mathrm{grad}f(x), v\rangle} + h(x)f(x)\underbrace{Dg(x)(v)}_{\langle \mathrm{grad}g(x), v\rangle} + f(x)g(x)\underbrace{Dh(x)(v)}_{\langle \mathrm{grad}h(x), v\rangle} \ , \end{aligned}$$

also

$$\langle \mathrm{grad}(fgh)(x) - g(x)h(x)\mathrm{grad}f(x) - h(x)f(x)\mathrm{grad}g(x) - f(x)g(x)\mathrm{grad}h(x), v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in V \ .$$

b) Nach der Produktregel ist $\forall\, x \in U,\ v \in V$

$$D(fk)(x)(v) = Df(x)(v)k(x) + f(x)Dk(x)(v) \ .$$

Mit

$$L_x : V \ni v \longmapsto \underbrace{Df(x)(v)}_{l_x(v)} k(x) \in V$$

ist dann

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(fk)(x) &= \mathrm{Spur}(D(fk)(x)) \\ &= \mathrm{Spur}(l_x k(x) + f(x)Dk(x)) \\ &= \underbrace{\mathrm{Spur}(L_x)}_{l_x(k(x))} + f(x)\ \underbrace{\mathrm{Spur}(Dk(x))}_{\mathrm{div}k(x)} \\ &= Df(x)(k(x)) + f(x)\,\mathrm{div}k(x) \\ &= \langle \mathrm{grad}f(x), k(x)\rangle + f(x)\,\mathrm{div}k(x) \ . \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4:

a) $\forall\, x \in U$ und $(v_1, v_2) \in V \times V$ ist

$$\begin{aligned}
\langle v_1 \times v_2, \mathrm{rot}(fk)(x)\rangle &= \mathrm{Rot}(fk)(x)(v_1, v_2)\\
&= \langle D(fk)(x)(v_1), v_2\rangle - \langle D(fk)(x)(v_2), v_1\rangle\\
&\quad \text{(Produktregel:)}\\
&= \langle Df(x)(v_1)k(x) + f(x)Dk(x)(v_1), v_2\rangle -\\
&\quad \langle Df(x)(v_2)k(x) + f(x)Dk(x)(v_2), v_1\rangle\\
&= \langle \underbrace{Df(x)(v_1)}_{\in\mathbb{R}}\, k(x), v_2\rangle - \langle \underbrace{Df(x)(v_2)}_{\in\mathbb{R}}\, k(x), v_1\rangle +\\
&\quad f(x)\underbrace{(\langle Dk(x)(v_1), v_2\rangle - \langle Dk(x)(v_2), v_1\rangle)}_{\mathrm{Rot}k(x)(v_1,v_2)}\\
&= \langle k(x), Df(x)(v_1)\, v_2\rangle - \langle k(x), Df(x)(v_2)\, v_1\rangle + f(x)\langle v_1 \times v_2, \mathrm{rot}k(x)\rangle\\
&= \langle k(x), Df(x)(v_1)\, v_2 - Df(x)(v_2)\, v_1\rangle + \langle v_1 \times v_2, f(x)\,\mathrm{rot}k(x)\rangle\\
&= \langle k(x), \langle \mathrm{grad}f(x), v_1\rangle v_2 - \langle \mathrm{grad}f(x), v_2\rangle v_1\rangle + \langle v_1 \times v_2, f(x)\,\mathrm{rot}k(x)\rangle\\
&\quad \text{(Grassmannscher Entwicklungssatz: } (a\times b)\times c = \langle a,c\rangle b - \langle b,c\rangle a \text{ :)}\\
&= \langle k(x), (v_1 \times v_2) \times \mathrm{grad}f(x)\rangle + \langle v_1 \times v_2, f(x)\,\mathrm{rot}k(x)\rangle\\
&\quad \text{(Vertauschungsregel: } \langle a, b\times c\rangle = \langle b, c\times a\rangle \text{ :)}\\
&= \langle v_1 \times v_2, \mathrm{grad}f(x) \times k(x)\rangle + \langle v_1 \times v_2, f(x)\,\mathrm{rot}k(x)\rangle
\end{aligned}$$

und folglich ist

$$\langle v_1 \times v_2, \mathrm{rot}(fk)(x) - f(x)\mathrm{rot}k(x) - \mathrm{grad}f(x) \times k(x)\rangle = 0 \quad \forall\,(v_1, v_2) \in V \times V\ .$$

Wegen $\{v_1 \times v_2 \,:\, (v_1, v_2) \in V \times V\} = V$ folgt daraus die Behauptung.

b) Aus der Produktregel folgt:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{grad}\langle k_1, k_2\rangle(x), v\rangle &= D\langle k_1, k_2\rangle(x)(v)\\
&= \langle Dk_1(x)(v), k_2(x)\rangle + \langle k_1(x), Dk_2(x)(v)\rangle \quad \forall\, x \in U,\ v \in V\ .
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\langle k_1(x) \times \mathrm{rot}k_2(x), v\rangle &= \langle v \times k_1(x), \mathrm{rot}k_2(x)\rangle\\
&= \mathrm{Rot}k_2(x)(v, k_1(x))\\
&= \langle Dk_2(x)(v), k_1(x)\rangle - \langle Dk_2(x)(k_1(x)), v\rangle \quad \forall\, x \in U,\ v \in V
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\langle k_1(x), Dk_2(x)(v)\rangle &= \langle k_1(x) \times \mathrm{rot}k_2(x) + Dk_2(x)(k_1(x)), v\rangle \quad \text{und analog}\\
\langle k_2(x), Dk_1(x)(v)\rangle &= \langle k_2(x) \times \mathrm{rot}k_1(x) + Dk_1(x)(k_2(x)), v\rangle \quad \forall\, x \in U,\ v \in V\ .
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{grad}\langle k_1, k_2\rangle(x) - k_1(x) \times \mathrm{rot}k_2(x) - Dk_2(x)(k_1(x))\\
- k_2(x) \times \mathrm{rot}k_1(x) - Dk_1(x)(k_2(x)), v\rangle = 0 \quad \forall\, x \in U,\ v \in V\ .
\end{aligned}$$

c) Aus der Produktregel folgt:

$$D(k_1 \times k_2)(x)(v) = Dk_1(x)(v) \times k_2(x) + k_1(x) \times Dk_2(x)(v) \quad \forall\, x \in U,\ v \in V\ .$$

Mit

$$\begin{aligned}
L_1 &: V \ni v \longmapsto Dk_1(x)(v) \times k_2(x) \in V \quad \text{und}\\
L_2 &: V \ni v \longmapsto Dk_2(x)(v) \times k_1(x) \in V
\end{aligned}$$

ist

$$D(k_1 \times k_2)(x) = L_1 - L_2$$

und folglich

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(k_1 \times k_2)(x) &= \operatorname{spur}(D(k_1 \times k_2)(x)) \\ &= \operatorname{spur}(L_1) - \operatorname{spur}(L_2) \\ &\quad \text{(Anleitung:)} \\ &= \langle k_2(x), \operatorname{rot} k_1(x)\rangle - \langle k_1(x), \operatorname{rot} k_2(x)\rangle \ .\end{aligned}$$

Beweis der in der Anleitung aufgestellten Behauptung:
Sei (e_1, e_2, e_3) eine Basis von V mit $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ und $e_3 \times e_1 = e_2$.
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sei die zugehörige duale Basis von V^*. Dann gilt nach Aufgabe 1 / Blatt 12:

$$\operatorname{Spur}(L) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(L(e_i)) = \sum_{i=1}^{3} \langle L(e_i), e_i\rangle \ .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Spur}(L) &= \sum_{i=1}^{3} \langle Dk(x)(e_i) \times w, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle w, e_i \times Dk(x)(e_i)\rangle = \left\langle w, \sum_{i=1}^{3} e_i \times Dk(x)(e_i)\right\rangle\end{aligned}$$

Mit $h := \sum\limits_{i=1}^{3} e_i \times Dk(x)(e_i)$ gilt nun:

$$\begin{aligned}\langle h, e_1\rangle &= \langle e_2 \times Dk(x)(e_2), e_1\rangle + \langle e_3 \times Dk(x)(e_3), e_1\rangle \\ &= \langle e_1 \times e_2, Dk(x)(e_2)\rangle + \langle e_1 \times e_3, Dk(x)(e_3)\rangle \\ &= \langle e_3, Dk(x)(e_2)\rangle - \langle e_2, Dk(x)(e_3)\rangle \\ &\quad \text{(Aufgabe2a:)} \\ &= \langle \operatorname{rot} k(x), e_1\rangle\end{aligned}$$

und analog

$$\langle h, e_2\rangle = \langle \operatorname{rot} k(x), e_2\rangle \ , \ \langle h, e_3\rangle = \langle \operatorname{rot} k(x), e_3\rangle \ .$$

Es folgt:

$$\operatorname{rot} k(x) = h\left(= \sum_{i=1}^{3} e_i \times Dk(x)(e_i)\right)$$

und damit

$$\operatorname{Spur}(L) = \langle w, \operatorname{rot} k(x)\rangle \ .$$

d) $\forall\,(v_1,v_2)\in V\times V,\ x\in U$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle v_1\times v_2,\mathrm{rot}(k_1\times k_2)(x)\rangle &= \mathrm{Rot}(k_1\times k_2)(x)(v_1,v_2)\\
&= \langle D(k_1\times k_2)(x)(v_1),v_2\rangle-\langle D(k_1\times k_2)(x)(v_2),v_1\rangle\\
&= \langle Dk_1(x)(v_1)\times k_2(x)+k_1(x)\times Dk_2(x)(v_1),v_2\rangle-\\
&\quad\langle Dk_1(x)(v_2)\times k_2(x)+k_1(x)\times Dk_2(x)(v_2),v_1\rangle\\
&= \langle Dk_1(x)(v_1)\times k_2(x),v_2\rangle-\langle Dk_1(x)(v_2)\times k_2(x),v_1\rangle+\\
&\quad\langle k_1(x)\times Dk_2(x)(v_1),v_2\rangle-\langle k_1(x)\times Dk_2(x)(v_2),v_1\rangle\\
&= \langle k_2(x),v_2\times Dk_1(x)(v_1)-v_1\times Dk_1(x)(v_2)\rangle+\\
&\quad\langle k_1(x),Dk_2(x)(v_1)\times v_2-Dk_2(x)(v_2)\times v_1\rangle\\
&= \langle Dk_2(x)(v_1)\times v_2-Dk_2(x)(v_2)\times v_1,k_1(x)\rangle-\\
&\quad\langle Dk_1(x)(v_1)\times v_2-Dk_1(x)(v_2)\times v_1,k_2(x)\rangle\\
&\quad\text{(Aufgabe 1b:)}\\
&= \langle v_1\times v_2,\mathrm{Spur}(Dk_2(x))k_1(x)-Dk_2(x)(k_1(x))\rangle-\\
&\quad\langle v_1\times v_2,\mathrm{Spur}(Dk_1(x))k_2(x)-Dk_1(x)(k_2(x))\rangle\\
&= \langle v_1\times v_2,\mathrm{div}k_2(x)\,k_1(x)-Dk_2(x)(k_1(x))-\\
&\qquad\mathrm{div}k_1(x)\,k_2(x)+Dk_1(x)(k_2(x))\rangle\ .
\end{aligned}$$

Wegen $\{v_1\times v_2\,:\,(v_1,v_2)\in V\times V\}=V$ folgt daraus die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) $(e_1,\ldots,e_n)$ sei eine Orthonormalbasis von V. Dann ist

$$\Delta(\varphi\psi)(x)=\sum_{i=1}^{n}\partial^2_{e_i,e_i}(\varphi\psi)(x)\quad\forall\,x\in U\ .$$

Mit

$$\begin{aligned}
\partial_{e_i}(\varphi\psi)(x)&=\partial_{e_i}\varphi(x)\,\psi(x)+\varphi(x)\,\partial_{e_i}\psi(x)\ ,\\
\partial^2_{e_i,e_i}(\varphi\psi)(x)&=\partial^2_{e_i,e_i}\varphi(x)\,\psi(x)+2\,\partial_{e_i}\varphi(x)\,\partial_{e_i}\psi(x)+\varphi(x)\,\partial^2_{e_i,e_i}\psi(x)
\end{aligned}$$

erhält man

$$\Delta(\varphi\psi)(x)=\psi(x)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\partial^2_{e_i,e_i}\varphi(x)}_{\Delta\varphi(x)}+2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\partial_{e_i}\varphi(x)\,\partial_{e_i}\psi(x)}_{\langle\mathrm{grad}\varphi(x),\mathrm{grad}\psi(x)\rangle}+\varphi(x)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\partial^2_{e_i,e_i}\psi(x)}_{\Delta\psi(x)}$$

b) Aus

$$\partial_v\varphi(x)=\partial(x;v)=\langle\mathrm{grad}\varphi(x),v\rangle\quad\forall\,x\in U,\ v\in V$$

folgt

$$\begin{aligned}
\partial^2_{v,w}\varphi(x)&=\langle D(\mathrm{grad}\varphi)(x)(w),v\rangle\quad\forall\,x\in U,\ v,w\in V\\
&\quad\|\quad\text{(Satz 13)}\\
\partial^2_{w,v}\varphi(x)&=\langle D(\mathrm{grad}\varphi)(x)(v),w\rangle\quad\forall\,x\in U,\ v,w\in V
\end{aligned}$$

und damit gilt für alle $(v_1,v_2)\in V\times V$:

$$\mathrm{Rot}(\mathrm{grad}\varphi)(x)(v_1,v_2)=\langle D(\mathrm{grad}\varphi)(x)(v_1),v_2\rangle-\langle D(\mathrm{grad}\varphi)(x)(v_2),v_1\rangle=0\ .$$

c) (e_1,e_2,e_3) sei eine Orthonormalbasis von V mit $e_1\times e_2=e_3$, $e_2\times e_3=e_1$ und $e_3\times e_1=e_2$. Dann gilt:

$$k(x)=\sum_{i=1}^{3}\underbrace{\langle k(x),e_i\rangle}_{=:k_i(x)}\,e_i\quad\forall\,x\in U$$

$$\Rightarrow\ Dk(x)(v) = \sum_{i=1}^{3} Dk_i(x)(v)\, e_i$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \partial_v k_i(x)\, e_i = \sum_{i=1}^{3} \langle Dk(x)(v), e_i\rangle\, e_i \quad \forall\, x \in U,\ v \in V\ ,$$

insbesondere

$$\partial_{e_j} k_i(x) = \langle Dk(x)(e_j), e_i\rangle \quad \forall\, x \in U,\ i,j \in \{1,2,3\}\ .$$

Es gilt für alle $x \in U$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}k(x) &= \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\langle \mathrm{rot}k(x), e_i\rangle}_{=:r_i(x)}\, e_i \\
&= (\langle Dk(x)(e_2), e_3\rangle - \langle Dk(x)(e_3), e_2\rangle)\, e_1 + \\
&\quad (\langle Dk(x)(e_3), e_1\rangle - \langle Dk(x)(e_1), e_3\rangle)\, e_2 + \\
&\quad (\langle Dk(x)(e_1), e_2\rangle - \langle Dk(x)(e_2), e_1\rangle)\, e_3 \\
&= (\partial_{e_2} k_3(x) - \partial_{e_3} k_2(x))\, e_1 + (\partial_{e_3} k_1(x) - \partial_{e_1} k_3(x))\, e_2 + (\partial_{e_1} k_2(x) - \partial_{e_2} k_1(x))\, e_3\ .
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\langle D(\mathrm{rot}k(x))(e_1), e_1\rangle &= \partial_{e_1} r_1(x) = \partial^2_{e_1,e_2} k_3(x) - \partial^2_{e_1,e_3} k_2(x) \\
\langle D(\mathrm{rot}k(x))(e_2), e_2\rangle &= \partial_{e_2} r_2(x) = \partial^2_{e_2,e_3} k_1(x) - \partial^2_{e_2,e_1} k_3(x) \\
\langle D(\mathrm{rot}k(x))(e_3), e_3\rangle &= \partial_{e_3} r_3(x) = \partial^2_{e_3,e_1} k_2(x) - \partial^2_{e_3,e_2} k_1(x)
\end{aligned}$$

und damit (und mit Satz 13) erhält man:

$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}k(x) = \partial_{e_1} r_1(x) + \partial_{e_2} r_2(x) + \partial_{e_3} r_3(x) = 0\ .$$

Lösung zu Aufgabe 6:

a) $(e_1, \ldots, e_n)$ sei eine Orthonormalbasis von V, $x \in U$. Dann gilt:

$$\langle \mathrm{grad}k_v(x), h\rangle = Dk_v(x)(h) = \langle Dk(x)(h), v\rangle \quad \forall\, h \in V\ ,$$

insbesondere

$$\langle \mathrm{grad}k_v(x), e_i\rangle = \langle Dk(x)(e_i), v\rangle\ ,\ i = 1, \ldots, n.$$

Es folgt:

$$\mathrm{grad}k_v(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{grad}k_v(x), e_i\rangle\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle Dk(x)(e_i), v\rangle\, e_i$$

und somit

$$D\mathrm{grad}k_v(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle D^2k(x)(e_i)(h), v\right\rangle e_i \quad \forall\, h \in V\ .$$

Mit Aufgabe 2 / Blatt 12 erhält man:

$$\begin{aligned}
\Delta k_v(x) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} k_v)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle D\operatorname{grad} k_v(x)(e_j), e_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \left\langle D^2 k(x)(e_i)(e_j), v \right\rangle e_i, e_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \left\langle D^2 k(x)(e_j)(e_j), v \right\rangle e_j, e_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle D^2 k(x)(e_j)(e_j), v \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \partial^2_{e_j,e_j} k(x), v \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{e_j,e_j} k(x), v \right\rangle \quad \forall\, v \in V
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \Delta k(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{e_j,e_j} k(x) \quad \forall\, x \in U\ .$$

b) (e_1, e_2, e_3) sei eine Orthonormalbasis von V mit $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ und $e_3 \times e_1 = e_2$. Mit Aufgabe 2 a) gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} k(x) = &\left(\langle Dk(x)(e_2), e_3\rangle - \langle Dk(x)(e_3), e_2\rangle\right) e_1 + \\
&\left(\langle Dk(x)(e_3), e_1\rangle - \langle Dk(x)(e_1), e_3\rangle\right) e_2 + \\
&\left(\langle Dk(x)(e_1), e_2\rangle - \langle Dk(x)(e_2), e_1\rangle\right) e_3 \quad \forall\, x \in U\ .
\end{aligned}$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned}
D\operatorname{rot} k(x)(v) = &\left(\left\langle D^2 k(x)(v)(e_2), e_3\right\rangle - \left\langle D^2 k(x)(v)(e_3), e_2\right\rangle\right) e_1 + \\
&\left(\left\langle D^2 k(x)(v)(e_3), e_1\right\rangle - \left\langle D^2 k(x)(v)(e_1), e_3\right\rangle\right) e_2 + \\
&\left(\left\langle D^2 k(x)(v)(e_1), e_2\right\rangle - \left\langle D^2 k(x)(v)(e_2), e_1\right\rangle\right) e_3 \quad \forall\, x \in U,\ v \in V\ ,
\end{aligned}$$

insbesondere

$$\begin{aligned}
\langle D\operatorname{rot} k(x)(e_2), e_3\rangle &= \left\langle D^2 k(x)(e_2)(e_1), e_2\right\rangle - \left\langle D^2 k(x)(e_2)(e_2), e_1\right\rangle\ , \\
\langle D\operatorname{rot} k(x)(e_3), e_2\rangle &= \left\langle D^2 k(x)(e_3)(e_3), e_1\right\rangle - \left\langle D^2 k(x)(e_3)(e_1), e_3\right\rangle\ , \\
\langle D\operatorname{rot} k(x)(e_3), e_1\rangle &= \left\langle D^2 k(x)(e_3)(e_2), e_3\right\rangle - \left\langle D^2 k(x)(e_3)(e_3), e_2\right\rangle\ , \\
\langle D\operatorname{rot} k(x)(e_1), e_3\rangle &= \left\langle D^2 k(x)(e_1)(e_1), e_2\right\rangle - \left\langle D^2 k(x)(e_1)(e_2), e_1\right\rangle\ , \\
\langle D\operatorname{rot} k(x)(e_1), e_2\rangle &= \left\langle D^2 k(x)(e_1)(e_3), e_1\right\rangle - \left\langle D^2 k(x)(e_1)(e_1), e_3\right\rangle\ , \\
\langle D\operatorname{rot} k(x)(e_2), e_1\rangle &= \left\langle D^2 k(x)(e_2)(e_2), e_3\right\rangle - \left\langle D^2 k(x)(e_2)(e_3), e_2\right\rangle \quad \forall\, x \in U\ .
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{rot} k(x)) = &(\langle D\operatorname{rot} k(x)(e_2), e_3\rangle - \langle D\operatorname{rot} k(x)(e_3), e_2\rangle)\, e_1 + \\
&(\langle D\operatorname{rot} k(x)(e_3), e_1\rangle - \langle D\operatorname{rot} k(x)(e_1), e_3\rangle)\, e_2 + \\
&(\langle D\operatorname{rot} k(x)(e_1), e_2\rangle - \langle D\operatorname{rot} k(x)(e_2), e_1\rangle)\, e_3 \\
= &[\langle D^2 k(x)(e_2)(e_1), e_2\rangle - \langle D^2 k(x)(e_2)(e_2), e_1\rangle + \\
&\langle D^2 k(x)(e_1)(e_1), e_1\rangle - \langle D^2 k(x)(e_1)(e_1), e_1\rangle - \\
&\langle D^2 k(x)(e_3)(e_3), e_1\rangle + \langle D^2 k(x)(e_3)(e_1), e_3\rangle]\, e_1 + \\
&[\langle D^2 k(x)(e_3)(e_2), e_3\rangle - \langle D^2 k(x)(e_3)(e_3), e_2\rangle + \\
&\langle D^2 k(x)(e_2)(e_2), e_2\rangle - \langle D^2 k(x)(e_2)(e_2), e_2\rangle - \\
&\langle D^2 k(x)(e_1)(e_1), e_2\rangle + \langle D^2 k(x)(e_1)(e_2), e_1\rangle]\, e_2 + \\
&[\langle D^2 k(x)(e_1)(e_3), e_1\rangle - \langle D^2 k(x)(e_1)(e_1), e_3\rangle + \\
&\langle D^2 k(x)(e_3)(e_3), e_3\rangle - \langle D^2 k(x)(e_3)(e_3), e_3\rangle - \\
&\langle D^2 k(x)(e_2)(e_2), e_3\rangle + \langle D^2 k(x)(e_2)(e_3), e_2\rangle]\, e_3 \quad \forall\, x \in U\ .
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\operatorname{div} k(x) = \sum_{j=1}^{3} \langle Dk(x)(e_j), e_j\rangle \quad \forall\, x \in U$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{D(\operatorname{div} k)(x)(v)}_{\langle \operatorname{grad}(\operatorname{div} k)(x), v\rangle} = \sum_{j=1}^{3} \left\langle D^2 k(x)(v)(e_j), e_j\right\rangle \quad \forall\, x \in U,\ v \in V\ ,$$

also

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\operatorname{div} k)(x) = &\left(\sum_{j=1}^{3} \left\langle D^2 k(x)(e_1)(e_j), e_j\right\rangle\right) e_1 + \\
&\left(\sum_{j=1}^{3} \left\langle D^2 k(x)(e_2)(e_j), e_j\right\rangle\right) e_2 + \\
&\left(\sum_{j=1}^{3} \left\langle D^2 k(x)(e_3)(e_j), e_j\right\rangle\right) e_3\ .
\end{aligned}$$

Man erhält also

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{rot} k(x)) = &\operatorname{grad}(\operatorname{div} k)(x) - \\
&\left[\left\langle D^2 k(x)(e_1)(e_1), e_1\right\rangle + \left\langle D^2 k(x)(e_2)(e_2), e_1\right\rangle + \left\langle D^2 k(x)(e_3)(e_3), e_1\right\rangle\right] e_1 - \\
&\left[\left\langle D^2 k(x)(e_1)(e_1), e_2\right\rangle + \left\langle D^2 k(x)(e_2)(e_2), e_2\right\rangle + \left\langle D^2 k(x)(e_3)(e_3), e_2\right\rangle\right] e_2 - \\
&\left[\left\langle D^2 k(x)(e_1)(e_1), e_3\right\rangle + \left\langle D^2 k(x)(e_2)(e_2), e_3\right\rangle + \left\langle D^2 k(x)(e_3)(e_3), e_3\right\rangle\right] e_3 \\
= &\operatorname{grad}(\operatorname{div} k)(x) - \sum_{i=1}^{3} \underbrace{D^2 k(x)(e_i)(e_i)}_{\partial^2_{e_i, e_i} k(x)} \\
\underset{\text{a)}}{=} &\operatorname{grad}(\operatorname{div} k)(x) - \Delta k(x) \quad \forall\, x \in U\ .
\end{aligned}$$