BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1:

V sei ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{L}(V)$ der Vektorraum der linearen Abbildungen von V in V und $\mathrm{id} : V \ni v \longmapsto v \in V$ die identische Abbildung.

Zeigen Sie:

a) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die zugehörige duale Basis von V^* und

$$\sigma : \mathcal{L}(V) \ni L \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(L(v_i)) \in \mathbb{K} ,$$

so gilt

(o) $\sigma \in \mathcal{L}(V)^*$ (d.h. σ ist linear) ,
(i) $\sigma(\mathrm{id}) = n$,
(ii) $\sigma(L \circ M) = \sigma(M \circ L) \quad \forall\, L, M \in \mathcal{L}(V)$.

b) Es gibt genau ein $\sigma \in \mathcal{L}(V)^*$ mit den Eigenschaften (i) und (ii).
($\sigma(L)$ heißt die *Spur von* L. Man schreibt auch $\mathrm{Spur}(L)$ statt $\sigma(L)$, im Englischen $\mathrm{trace}(L)$.)

Anleitung: Offenbar genügt es zu zeigen: Für ein $\Delta \in \mathcal{L}(V)^*$ mit $\Delta(\mathrm{id}) = 0$ und $\Delta(L \circ M) = \Delta(M \circ L)\ \ \forall\, L, M \in \mathcal{L}(V)$ gilt $\Delta(L_{ij}) = 0\ \ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$, wobei mit den Bezeichnungen von a) $L_{ij} : V \ni v \longmapsto \lambda_i(v)\, v_j \in V$ ist. Verifizieren Sie dazu: $L_{ij} \circ L_{kl} = \lambda_i(v_l) L_{kj}$, $L_{ij} \circ L_{ki} = L_{kj}$, $L_{ki} \circ L_{ij} = 0$ falls $k \neq j$, $L_{ij} \circ L_{ji} = L_{jj}$ und $L_{ji} \circ L_{ij} = L_{ii}$.

Aufgabe 2:

V sei ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, $U \subset V$, U offen, $k : U \to V$ differenzierbar.
Dann definiert man $\mathrm{div}\, k : U \to \mathbb{R}$ (koordinatenfrei!) durch $\mathrm{div}\, k(x) := \mathrm{spur}(Dk(x))\ \ \forall\, x \in U$.

Zeigen Sie, daß für jede Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von V und jedes $x \in U$

$$\mathrm{div}\, k(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle Dk(x)(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \partial k(x; e_i), e_i \rangle$$

gilt. Ist $V = \mathbb{R}^n$, $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis und $k(x) = (k_1(x), \ldots, k_n(x))^\top\ \forall\, x \in U$, so ist

$$\mathrm{div}\, k(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i k_i(x) \quad \forall\, x \in U .$$

Aufgabe 3:

V sei ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, $U \subset V$, U offen. Dann heißt

$$\Delta : C^2(U) \ni \varphi \longmapsto \Delta\varphi := \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, \varphi) \in C(U)$$

Laplace-Operator.

Zeigen Sie: Ist $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt

$$\Delta\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{e_i, e_i} \varphi(x) \quad \forall\, \varphi \in C^2(U) \text{ und } x \in U \,.$$

Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, so ist

$$\Delta\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{ii} \varphi(x) \quad \forall\, \varphi \in C^2(U) \text{ und } x \in U \,.$$

Berechnen Sie $\Delta\varphi$ für

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2)^\top \longmapsto \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x_1) \cosh(\lambda x_2) \in \mathbb{R} \,,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,.$$

Aufgabe 4:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei symmetrisch ($A^\top = A$),

$$f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \ni x \longmapsto \frac{x^\top A x}{x^\top x} \in \mathbb{R} \,.$$

a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$.

b) Zeigen Sie:

(i) Es gibt $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\underline{x}\|_2 = 1$ und

$$f(\underline{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}} f(x) \,, \tag{1}$$

und es gibt $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\overline{x}\|_2 = 1$ und

$$f(\overline{x}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}} f(x) \,. \tag{2}$$

(ii) Gilt (1), so ist $\underline{x}$ Eigenvektor von A zum kleinsten Eigenwert von A, gilt (2), so ist $\overline{x}$ Eigenvektor von A zum größten Eigenwert von A.

c) Bestimmen Sie $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}} f(x)$ und $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}} f(x)$ für $A := \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5:

Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \ni x = (x_1, x_2, x_3)^\top \longmapsto -\cos(\pi x_1) - \cos(\pi x_2) - \cos(\pi x_3) \in \mathbb{R} \,.$$

Bestimmen Sie

a) $\operatorname{grad} f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3$,
b) die singulären Stellen von f ,
c) $Hf(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3$,
d) die strengen lokalen Minimalstellen von f ,
e) die strengen lokalen Maximalstellen von f ,
f) die Sattelpunkte von f .

Abgabetermin: Freitag, 29. Januar 1998, in der Vorlesung