BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1:

Zu $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bezeichne L die Menge aller auf $\mathbb{R}$ definierten Lösungen von

(H) $$\dot{y} = Ay \ .$$

Weiter sei

$$D := \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)^2 + a_{21}a_{12} \ .$$

Zeigen Sie:

a) Im Fall $D > 0$ gilt mit $\lambda_{\substack{+\\(-)}} := \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \underset{(-)}{+} \sqrt{D}$ sowie mit

$$v_+ := \begin{pmatrix} -a_{12} \\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2} - \sqrt{D} \end{pmatrix} \text{ und } v_- := \begin{pmatrix} \frac{a_{11}-a_{22}}{2} - \sqrt{D} \\ a_{21} \end{pmatrix} \text{ falls } \frac{a_{11}-a_{22}}{2} - \sqrt{D} \neq 0 \ ,$$

$$v_+ := \begin{pmatrix} \frac{a_{11}-a_{22}}{2} + \sqrt{D} \\ a_{21} \end{pmatrix} \text{ und } v_- := \begin{pmatrix} -a_{12} \\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2} + \sqrt{D} \end{pmatrix} \text{ falls } \frac{a_{11}-a_{22}}{2} + \sqrt{D} \neq 0 :$$

$$L = \left\{ \mathbb{R} \ni t \longmapsto c_1 e^{\lambda_+ t} v_+ + c_2 e^{\lambda_- t} v_- \ : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} .$$

b) Im Fall $D = 0$ gilt mit $\lambda := \frac{a_{11}+a_{22}}{2}$:

$$L = \left\{ \mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \ : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \text{ falls } a_{12} = a_{21} = 0 \ ,$$

$$L = \left\{ \mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{\lambda t} \left((c_1 + c_2 t) \begin{pmatrix} \frac{a_{11}-a_{22}}{2} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \ : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \text{ falls } a_{21} \neq 0 \ ,$$

$$L = \left\{ \mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{\lambda t} \left((c_1 + c_2 t) \begin{pmatrix} a_{12} \\ \frac{a_{22}-a_{11}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \ : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \text{ falls } a_{12} \neq 0 \ .$$

c) Im Fall $D < 0$ gilt mit

$$v_1(t) := \begin{pmatrix} \frac{a_{11}-a_{22}}{2} \cos\left(\sqrt{-D}\, t\right) - \sqrt{-D} \sin\left(\sqrt{-D}\, t\right) \\ a_{21} \cos\left(\sqrt{-D}\, t\right) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$v_2(t) := \begin{pmatrix} \frac{a_{11}-a_{22}}{2} \sin\left(\sqrt{-D}\, t\right) + \sqrt{-D} \cos\left(\sqrt{-D}\, t\right) \\ a_{21} \sin\left(\sqrt{-D}\, t\right) \end{pmatrix} \ \forall t \in \mathbb{R} \ :$$

$$L = \left\{ \mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{\frac{a_{11}+a_{22}}{2} t} \left(c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) \right) \ : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Menge aller auf $\mathbb{R}$ definierten Lösungen von $\dot{y} = Ay$ für die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie zu $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und

$$b : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ t\,(1-2t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

die eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems

(I)
$$\dot{y} = Ay + b(t)$$
$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie dazu zuerst, daß

$$\psi : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

eine Lösung von (I) ist.

Aufgabe 4:

Mit $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1, x_2 \in]0, 2\pi[\right\}$ und $r, a \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < a$ sei

$$f : U \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto r \begin{pmatrix} -\sin(x_1)\cos(x_2) \\ -\sin(x_1)\sin(x_2) \\ \cos(x_1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$g : U \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -(a + r\cos(x_1))\sin(x_2) \\ (a + r\cos(x_1))\cos(x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ und}$$

$$h : U \ni x \longmapsto f(x) \times g(x) \in \mathbb{R}^3$$

(wobei „$\times$“ das zur Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ gehörige Vektorprodukt sei).

Berechnen Sie $Jh(x)$ für alle $x \in U$. (*Anleitung:* Verwenden Sie die Produktregel!)

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$U \ni x \longmapsto \|h(x)\|_2 \ \left(:= \left(h(x)^\top h(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

in jedem $x \in U$ differenzierbar ist.

Aufgabe 5:

Mit

$$f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} 2 + \sin(x) \\ x \ln(1 + x^2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 > 0 \right\}$$

und

$$g : U_1 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1^{x_2} \ \left(:= e^{x_2 \ln(x_1)} \right) \in \mathbb{R}$$

ist wegen $f(\mathbb{R}) \subset U_1$ die Abbildung $h := g \circ f$ wohldefiniert. Berechnen Sie h'.

Anleitung: Verwenden Sie die Kettenregel!

Abgabetermin: Freitag, 22. Januar 1998, in der Vorlesung