BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1:

Mit einer symmetrischen positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($A^\top = A$ und $x^\top Ax > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$), einem $b \in \mathbb{R}^n$ und einem $c \in \mathbb{R}$ sei

$$f(x) := \frac{1}{2}\, x^\top Ax + b^\top x + c \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad x^* := -A^{-1}b\,.$$

Zeigen Sie:

a) $f(x^* + h) = f(x^*) + \frac{1}{2}\, h^\top Ah \ \ \forall\, h \in \mathbb{R}^n$ und folglich $f(x^*) < f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{x^*\}$.

b) $x = x^* \ \Leftrightarrow \ \mathrm{grad} f(x) = 0$

c) $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ ist

$$f(x_0 + t^* v) = \min_{t\in\mathbb{R}} f(x_0 + tv) \ \Leftrightarrow \ t^* = -\frac{(Ax_0 + b)^\top v}{v^\top Av} =: t_{(x_0,v)}\,.$$

Das *Gradientenverfahren* zur Bestimmung von $x^* \in \mathbb{R}^n$ verläuft wie folgt:

> Zu einer vorliegenden Iterierten $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, wählt man im Fall $\mathrm{grad} f(x_i) \neq 0$ mit $v_i := -\mathrm{grad} f(x_i) = -(Ax_i + b)$ als nächste Iterierte
>
> $$x_{i+1} := x_i + t_{(x_i,v_i)} v_i = x_i + \frac{v_i^\top v_i}{v_i^\top Av_i}\, v_i\,.$$
>
> Im Fall $\mathrm{grad} f(x_i) = 0$ ist $x_i = x^*$ und man setzt $x_{i+1} := x_i$.

Man kann zeigen, daß dann $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x^*$ für jedes $x_1 \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Berechnen Sie zu

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ b := -\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix},\ c \text{ beliebig}$$

und $x_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Iterierten $x_2, \ldots, x_{10}$. Zeigen Sie, daß $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 2:

Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi_1 \sin\xi_2 \cos\xi_3 \\ \xi_1 \sin\xi_2 \sin\xi_3 \\ \xi_1 \cos\xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,.$$

Bestimmen Sie zu $\xi \in \mathbb{R}^3$ die Funktionalmatrix $Jf(\xi) := (\partial_j f_i(\xi))_{i,j=1}^3$ und $\det(Jf(\xi))$.
Für welche $\xi \in \mathbb{R}^3$ ist $\det(Jf(\xi)) = 0$?
Bestimmen Sie zu jedem $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ alle $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ mit $\xi_1 \geq 0$ und $f(\xi) = x$.

Zeigen Sie, daß für $D := \left\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^\top \in \mathbb{R}^3 :\ \xi_1 > 0,\ \xi_2 \in]0,\pi[,\ \xi_3 \in [0,2\pi[\right\}$

$$f(D) = \mathbb{R}^3 \backslash \left\{(0,0,x_3)^\top :\ x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

gilt und daß $f|D$ injektiv ist.
Bestimmen sie für jedes $x \in f(D)$ das eindeutig bestimmte $\xi \in D$ mit $f(\xi) = x$.

Bemerkung: Für $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^\top \in D$ heißen ξ_1,ξ_2,ξ_3 Kugelkoordinaten von $x = f(\xi)$. Statt $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^\top$ schreibt man meistens $(r,\theta,\Phi)^\top$.

Aufgabe 3:

Lösen Sie Aufgabe 2, jedoch für

$$f : \mathbb{R}^3 \ni \xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^\top \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi_1 \cos\xi_2 \\ \xi_1 \sin\xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ .$$

und $D := \left\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^\top \in \mathbb{R}^3 :\ \xi_1 > 0,\ \xi_2 \in [0,2\pi[,\ \xi_3 \in \mathbb{R}\right\}$

Bemerkung: Für $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^\top \in D$ heißen ξ_1,ξ_2,ξ_3 Zylinderkoordinaten von $x = f(\xi)$. Statt $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^\top$ schreibt man meistens $(\varrho,\theta,x_3 \text{ (oder } z))^\top$.

Aufgabe 4:

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien symmetrisch ($A^\top = A,\ B^\top = B$).
Zusätzlich sei B positiv definit ($x^\top Bx > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$).

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x,y) \longmapsto x^\top By =: \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt und die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto B^{-1}Ax \in \mathbb{R}^n$$

ist bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ symmetrisch ($\langle L(x),y\rangle = \langle x,L(y)\rangle \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$). Folglich gibt es (wie in der linearen Algebra gezeigt wird) eine aus Eigenvektoren bestehende Orthonormalbasis $(u_1,\ldots,u_n)$ von $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$. D. h. es gibt $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $L(u_i) = \lambda_i u_i,\ i = 1,\ldots,n$, und es gilt $\langle u_i,u_j\rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,\ldots,n$, oder äquivalent dazu:

$$Au_i = \lambda_i Bu_i,\ i = 1,\ldots,n, \text{ und } u_i^\top Bu_j = \delta_{ij},\ i,j = 1,\ldots,n.$$

b) Setzt man mit den durch

$$\begin{aligned} &\ddot{w}_i(t) = \lambda_i w_i(t)\ \ \forall t \in \mathbb{R}, && \ddot{v}_i(t) = \lambda_i v_i(t)\ \ \forall t \in \mathbb{R}, \\ &w_i(0) = 1, && v_i(0) = 0, \\ &\dot{w}_i(0) = 0, && \dot{v}_i(0) = 1, \end{aligned}$$

eindeutig bestimmten Funktionen $v_i, w_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\tilde{x}(t) := \sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_0^\top Bu_i\right) w_i(t) + \left(y_0^\top Bu_i\right) v_i(t)\right) u_i \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

so löst $\tilde{x}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &B\ddot{x} = Ax, \\ &x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0. \end{aligned} \tag{+}$$

Ist $\tilde{x}$ die einzige auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung von (+) ?

Abgabetermin: Freitag, 15. Januar 1999, in der Vorlesung