BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1:

M sei ein euklidischer Punktraum bezüglich V. $\|\cdot\|$ bezeichne die euklidische Norm auf V, d die zugehörige Metrik auf M.

$P(t) \in M$ sei der Ort, $v(t) \in V$ die Geschwindigkeit eines Teilchens zur Zeit $t \in I$, wobei

$$v : I \ni t \longmapsto v(t) \in V$$

stetig sei. Dann ist für alle $[t_0, t_1] \subset I$

$$s(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \|v(\tau)\| \, d\tau$$

die Länge des von dem Teilchen im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ zurückgelegten Weges.

a) Zeigen Sie:

$$d(P(t_0), P(t_1)) \leq s(t_0, t_1) \quad \forall\, [t_0, t_1] \subset I.$$

b) Bestimmen Sie $s(t_0, t_1)$ für alle $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ für

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto P(t) := O + r\cos(wt)\, e_1 + r\sin(wt)\, e_2 + \frac{hw}{2\pi}\, t\, e_3$$

mit $O \in M$, einer Orthonormalbasis (e_1, e_2, e_3) von V und $r, w, h \in \,]0, \infty[$.

Aufgabe 2:

Mit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y} = A\, y \;,\; y(0) = y_0 \;.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas, daß mit

$$\|A\| := \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\|\varphi(t)\|_\infty \leq \|y_0\|_\infty \, e^{\|A\|\cdot|t|} \tag{+}$$

gilt.

Bemerkung: Ist A die Einheitsmatrix, so ist $\varphi(t) = e^t y_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und in der Abschätzung (+) steht für $t \geq 0$ das Gleichheitszeichen.

Aufgabe 3:

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei (mit $g, l > 0$) Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin(x) \ , \ x(0) = 0 \ , \ \dot{x}(0) = v_0 \ .$$

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lösung des (durch Linearisierung der rechten Seite der Differentialgleichung entstehenden vereinfachten) Anfangswertproblems

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} x \ , \ x(0) = 0 \ , \ \dot{x}(0) = v_0 \ ,$$

also

$$\psi(t) = v_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Zeigen Sie, daß für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\left\| (\varphi(t), \dot{\varphi}(t))^\top - (\psi(t), \dot{\psi}(t))^\top \right\|_2 \leq \frac{1}{6} \sqrt{\frac{l}{g}} \, |v_0|^3 \left| \int_0^t \left| \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, \tau\right) \right|^3 e^{\max\left\{1, \frac{l}{g}\right\} |t-\tau|} d\tau \right|$$

gilt.

Bemerkung: Wie in Aufgabe 3 auf Blatt 4 gezeigt wurde, gilt für $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ni (t, y) \longmapsto \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(y_1) \end{pmatrix}$:

$$\left\| f(t,y) - f(t,y') \right\|_2 \leq \max\left\{1, \frac{l}{g}\right\} \left\| y - y' \right\|_2 \quad \forall\, (t,y), (t,y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 4:

V sei ein euklidischer Vektorraum. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das Skalarprodukt auf $V \times V$, $\| \cdot \|$ die zugehörige Norm.

a) Mit $a \in V$ sei $f : V \ni x \longmapsto \|x - a\| \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, daß für jedes $x \in V \backslash \{a\}$ und jedes $v \in V$

$$\partial f(x; v) = \frac{\langle x - a, v \rangle}{\|x - a\|}$$

(und damit $\operatorname{grad} f(x) = \frac{1}{\|x-a\|}(x - a)$) gilt. Für welche $v \in V$ existiert $\partial f(a; v)$?
Anleitung: $\partial f(x; v)$ existiert genau dann, wenn

$$\varphi : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \|x + tv - a\| = (\langle x - a + tv, x - a + tv \rangle)^{\frac{1}{2}} = (\|x - a\|^2 + 2t\langle x - a, v \rangle + t^2 \|v\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

in $t = 0$ differenzierbar ist. Ist letzteres der Fall, so gilt $\partial f(x; v) = \dot{\varphi}(0)$.

b) Mit $q_i \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, und $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$ sei

$$f : V \backslash \{x_1, \ldots, x_n\} \ni x \longmapsto - \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\|x - x_i\|} \ .$$

Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x)$ für alle $x \in V \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Stellen Sie im Fall $n = 2$ fest, für welche $q_1, q_2 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ es („Staupunkte") $x \in V$ mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$ gibt. Bestimmen Sie diese x und die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$.
Bemerkung: f beschreibt (bis auf einen Skalierungsfaktor) das Potential des von den Ladungen q_i in x_i für $i = 1, \ldots, n$ erzeugten elektrischen Feldes.

Abgabetermin: Freitag, 8. Januar 1999, in der Vorlesung

Schöne Weihnachten und viel Glück und Erfolg für 1999!