BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

Die exzentrische Anomalie $u(t)$ eines Planeten zur Zeit t nach dem letzten Apheldurchgang genügt der Keplerschen Gleichung

$$u(t) + \varepsilon \, \sin\left(u(t)\right) = \frac{2\pi}{\tau} \, t \; .$$

Dabei bezeichnet τ die Umlaufzeit des Planeten und $\varepsilon \in]0,1[$ die numerische Exzentrizität seiner elliptischen Umlaufbahn um die Sonne.
(Z. B. ist für die Erde $\varepsilon \approx 0.017$ und $\tau = 1$ Jahr, für den Pluto $\varepsilon \approx 0.24864$ und $\tau = 248.4$ Jahre.)

Zeigen Sie, daß für jedes $t \in [0, \tau]$ gilt:

a)
$$T : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{2\pi}{\tau} \, t - \varepsilon \, \sin\left(x\right)$$
ist eine kontrahierende Abbildung von $\mathbb{R}$ in sich selbst mit der Kontraktionskonstanten ε.

b) Für ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $\{x_i := T(x_{i-1})\}_{i \in \mathbb{N}}$ gegen $u(t)$. Dabei gilt:

$$|u(t) - x_i| \leq \frac{\varepsilon^i}{1-\varepsilon} \, |x_1 - x_0| \quad \text{und}$$
$$|u(t) - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \, |x_i - x_{i-1}| \quad \forall i \in \mathbb{N} \; .$$

Bestimmen Sie für $\varepsilon := 0.24864$ (, $\tau := 248.4$) und $x_0 := \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{\tau}{4} = \frac{\pi}{2}$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\left|u\left(\frac{\tau}{4}\right) - x_i\right| \leq 10^{-5}$. (Jedes i, für das $\frac{\varepsilon^i}{1-\varepsilon} \, |x_1 - x_0| \leq 10^{-5}$ ist, hat die gewünschte Eigenschaft.) Berechnen sie anschließend x_i und die (a posteriori-)Abschätzung $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \, |x_i - x_{i-1}|$ für $\left|u\left(\frac{\tau}{4}\right) - x_i\right|$.
Es ist $u\left(\frac{\tau}{4}\right) \approx 76.17°$. Sollte man nicht $u\left(\frac{\tau}{4}\right) = 90°$ erwarten?

Aufgabe 2:

Mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ sei $\|x\|_\infty := \max\limits_{i=1}^{n} |x_i| \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{K}^n$. Dann ist

$$\mathbb{K}^{n \times n} \ni A \longmapsto \max_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Ax\|_\infty =: \|A\|$$

eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^{n \times n}$ (der $(n \times n)$-Matrizen mit Komponenten aus $\mathbb{K}$) mit

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\| \, \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

($\|A\| = \max\limits_{\|x\|_\infty \leq 1} \|L(x)\|_\infty$, wenn L die lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \ni x \longmapsto Ax \in \mathbb{K}^n$ bezeichnet!)

a) Zeigen Sie

$$\|A\| = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Anleitung: „$\leq$“ ergibt sich aus einer naheliegenden Abschätzung.
Ist $\max\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$ und definiert man $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{K}^n$ durch

$$x_j := \begin{cases} \frac{a_{kj}}{|a_{kj}|} & \text{falls } a_{kj} \neq 0 \\ 0 & \text{falls } a_{kj} = 0 \end{cases}, \; j = 1, \ldots, n,$$

so gilt $\|x\|_\infty \leq 1$ und $\|Ax\|_\infty = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$.

b) $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sei *diagonaldominant*, d. h. es gelte $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Weiter sei $b \in \mathbb{K}^n$,

$$G := (g_{ij})_{i,j=1}^{n} \text{ mit } g_{ij} := \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{falls } i \neq j, \\ 0 & \text{falls } i = j \end{cases} \quad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

sowie

$$h = (h_1, \ldots, h_n)^\top \in \mathbb{K}^n \text{ mit } h_i := \frac{b_i}{a_{ii}}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie:

(i) $Ax = b$ ist äquivalent zu $x = Gx + h$.

(ii) Es ist $\|G\| < 1$.

(iii) Die Abbildung $T : \mathbb{K}^n \ni x \longmapsto Gx + h \in \mathbb{K}^n$ ist kontrahierend bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ mit der Kontraktionskonstanten $\|G\|$.

(iv) $\left\{x^\nu := G\, x^{\nu-1} + h\right\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $x^0 \in \mathbb{K}^n$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung $\hat{x}$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie zu der diagonaldominanten Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & -10 \end{pmatrix} \text{ und zu } b := \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

G, $\|G\|$ und h gemäß Aufgabe 2b). Berechnen Sie zu $x^0 := h$

$$x^\nu := G\, x^{\nu-1} + h, \; \nu = 1, \ldots, 8,$$

und schätzen Sie $\left\|\hat{x} - x^8\right\|_\infty$ nach oben ab, wobei $\hat{x}$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ bezeichnet.

Aufgabe 4:

$$x(t) = \cos\left(\frac{t}{10}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sin\left(\frac{t}{10}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sei der Koordinatenvektor des Ortes eines Senders bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems zur Zeit t. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der vom Sender abgesandten Signale sei $c = 1$. Zur Zeit $t_E = 10$ werde im Nullpunkt des Koordinatensystems ein Signal des Senders empfangen.

Kann man feststellen, wann das Signal abgesandt wurde?

Anleitung: t_A bezeichne den Zeitpunkt, zu dem das Signal abgesandt wurde. Nimmt man an, daß sich das Signal kugelförmig um $x(t_A)$ ausbreitet, so gilt $\|x(t_A)\|_2 = c \cdot (t_E - t_A)$, also $t_A = T(t_A)$ mit $T(t) := t_E - \frac{\|x(t)\|_2}{c}$. Schätzen Sie $|\dot{T}(t)|$ nach oben ab!

Abgabetermin: Freitag, 18. Dezember 1998, in der Vorlesung