BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

$\varphi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, $x^0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi : \mathbb{R}^n \backslash \{x^0\} \ni x \longmapsto \varphi(\|x - x^0\|_2) \in \mathbb{R}\,,$$
$$g : \mathbb{R}^n \backslash \{x^0\} \ni x \longmapsto (\partial_1 \Phi(x), \ldots, \partial_n \Phi(x))^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) $g(x) = \varphi'(\|x - x^0\|_2)\, \frac{x - x^0}{\|x - x^0\|_2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{x^0\}.$

b) $\|g(x)\|_2 = \left|\varphi'(\|x - x^0\|_2)\right| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{x^0\}.$

c) Gilt $0 < r_{\min} \le \|x - x^0\|_2 \le r_{\max}$ für alle x aus

$$Q := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \,:\, \alpha_i \le x_i \le \beta_i,\ i = 1, \ldots, n \right\},$$

so ist

$$\left|\Phi(x^1) - \Phi(x^2)\right| \le \left(\max_{r_{\min} \le r \le r_{\max}} \left|\varphi'(r)\right| \right) \|x^1 - x^2\|_2 \quad \forall x^1, x^2 \in Q.$$

Aufgabe 2:

Zu $Q := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x_i| \le 1,\ i = 1, 2, 3 \right\}$ sei

$$f : Q \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin(x_2 - x_3) + \cos(x_3 - x_1) \\ 2 x_1 x_2 x_3 \\ 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie eine Lipschitz-Konstante L für f.
(D. h. ein $L \ge 0$ mit $\|f(x) - f(y)\|_2 \le L \|x - y\|_2 \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3)^\top, y = (y_1, y_2, y_3)^\top \in Q$.)

Anleitung: Berechnen Sie Lipschitz-Konstanten für die Komponenten von f.

Aufgabe 3:

Zu $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sei

$$g : D \ni \left(t, (y_1, \ldots, y_n)^\top\right) \longmapsto g(t, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R} \quad \text{und}$$

$$f : D \ni \left(t, (y_1, \ldots, y_n)^\top\right) \longmapsto f(t, y_1, \ldots, y_n) := \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ g(t, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner sei I ein Intervall mit $I^\circ \neq \emptyset$.

Zeigen Sie:

a) Gilt für $\varphi : I \to \mathbb{R}$

$$(A_1) \qquad \begin{cases} \varphi^{(n)}(t) = g\Big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\Big) \ \ \forall t \in I \ \text{ und} \\ \varphi^{(\nu)}(t_0) = y_0^\nu, \ \ \nu = 0, \ldots, n-1, \end{cases}$$

wobei $\varphi^{(\nu)}(t)$ die ν-te Ableitung von φ in t bezeichnet, so gilt für die Abbildung

$$\Phi : I \ni t \longmapsto \Big(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\Big)^\top \in \mathbb{R}^n$$

$$(A_2) \qquad \begin{cases} \Phi'(t) = f(t, \Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t)) \ \ \forall t \in I \ \text{ und} \\ \Phi(t_0) = \big(y_0^0, \ldots, y_0^{n-1}\big)^\top. \end{cases}$$

b) Gilt für $\Phi : I \ni t \longmapsto (\Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t))^\top \in \mathbb{R}^n$ (A_2), so gilt für $\varphi := \Phi_1$ (A_1).

c) Aus

$$|g(t, y_1, \ldots, y_n) - g(t, x_1, \ldots, x_n)| \le L_g \, \|y - x\|_2$$

folgt

$$\|f(t, y_1, \ldots, y_n) - f(t, x_1, \ldots, x_n)\| \le \sqrt{1 + L_g^2} \, \|y - x\|_2$$

($x := (x_1, \ldots, x_n)^\top$, $y := (y_1, \ldots, y_n)^\top$).

d) Aus

$$\|f(t, y_1, \ldots, y_n) - f(t, x_1, \ldots, x_n)\|_2 \le L_f \, \|y - x\|_2$$

folgt

$$|g(t, y_1, \ldots, y_n) - g(t, x_1, \ldots, x_n)| \le L_f \, \|y - x\|_2$$

($x := (x_1, \ldots, x_n)^\top$, $y := (y_1, \ldots, y_n)^\top$).

Aufgabe 4:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei symmetrisch, $(u_1, \ldots, u_n)$ eine aus Eigenvektoren von A bestehende Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Für $i = 1, \ldots, n$ bezeichne λ_i ($\in \mathbb{R}$) den zu u_i gehörenden Eigenwert von A. Ferner seien $y_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$.

a) Bestimmen Sie Funktionen $w_i, v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, für die gilt:

$$\ddot{w}_i(t) = \lambda_i \, w_i(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ w_i(0) = 1, \ \dot{w}_i(0) = 0,$$
$$\ddot{v}_i(t) = \lambda_i \, v_i(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ v_i(0) = 0, \ \dot{v}_i(0) = 1.$$

b) Zeigen Sie, daß für

$$\varphi : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \Big(\Big(y_0^\top u_i \Big) w_i(t) + \Big(v_0^\top u_i \Big) v_i(t) \Big) u_i$$

gilt:

$$\ddot{\varphi}(t) = A \, \varphi(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi(0) = y_0, \ \dot{\varphi}(0) = v_0$$

(d. h. φ löst das Anfangswertproblem $\ddot{y} = A \, y, \ y(0) = y_0, \ \dot{y}(0) = v_0$).

Abgabetermin: Freitag, 11. Dezember 1998, in der Vorlesung