BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

B sei eine bogenweise zusammenhängende Teilmenge eines metrischen Raumes M_1, $f : B \to M_2$ eine stetige Abbildung von B in einen metrischen Raum M_2.

Zeigen Sie:

a) $f(B)$ ist bogenweise zusammenhängend.

b) Ist $M_2 = \mathbb{R}$, so ist $f(B)$ ein Intervall. (Für alle $x_1, x_2 \in B$ und jedes η zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ gibt es daher ein $x \in B$ mit $f(x) = \eta$. (*Zwischenwertsatz*))

c) Für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < r_1 \leq r_2$ ist
$$\left\{ r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \,:\, r_1 \leq r \leq r_2,\ \varphi \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,:\, r_1 \leq \|x\| \leq r_2 \right\}$$
abgeschlossen, beschränkt und bogenweise zusammenhängend.
(Beachten Sie, daß $\left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, r_1 \leq r \leq r_2,\ \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist!)

Aufgabe 2: (Zur Stetigkeit stückweise definierter Abbildungen)

T_i, $i = 1, \ldots, k$, seien nichtleere Teilmengen eines metrischen Raumes M_1, weiter sei $T := \bigcup_{i=1}^{k} T_i$.
$f_i : T_i \to M_2$, $i = 1, \ldots, k$, seien Abbildungen in einen metrischen Raum M_2, für die gilt:
$$f_i|T_i \cap T_j = f_j|T_i \cap T_j \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, k\} : (i \neq j \text{ und}) \ T_i \cap T_j \neq \emptyset.$$

Zeigen Sie:

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung $f : T \to M_2$ mit der Eigenschaft $f|T_i = f_i,\ i = 1, \ldots, k$.

b) Sind die Abbildungen $f_i,\ i = 1, \ldots, k$, stetig und die Teilmengen $T_i,\ i = 1, \ldots, k$, abgeschlossen, so ist f stetig.

Bleibt die Aussage b) wahr, wenn „abgeschlossen“ durch „offen“ ersetzt wird?

Bemerkung: Das Beispiel $f_1 :]0,1[\ni t \longmapsto 1$, $f_2 : [1,2] \ni t \longmapsto 2$ zeigt, daß allein aus der Stetigkeit der f_i noch nicht die Stetigkeit von f folgt!

Aufgabe 3:

a) M sei ein metrischer Raum, zu $x_0, x_1, x_2 \in M$ seien $\gamma_1 : [0,1] \to M$ und $\gamma_2 : [0,1] \to M$ stetige Abbildungen mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$, $\gamma_1(1) = x_1$ und $\gamma_2(1) = x_2$.
Zeigen Sie, daß
$$\gamma : [0,1] \ni t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(1-2t) & \text{falls } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$
eine wohldefinierte Abbildung von $[0,1]$ in M ist, für die $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$ ist.

b) Eine Teilmenge S eines Vektorraumes (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) heißt *sternförmig*, wenn es ein $x_0 \in S$ gibt mit
$$\{x_0 + t\,(x - x_0) \,:\, t \in [0,1]\} \subset S \quad \forall x \in S\,.$$
Zeigen Sie, daß sternförmige Teilmengen normierter Vektorräume bogenweise zusammenhängend sind.

Aufgabe 4:

M sei ein dreidimensionaler euklidischer Punktraum bezüglich V, $P(t) \in M$ der Ort und $v(t) \in V$ die Geschwindigkeit eines Teilchens zur Zeit $t \in \mathbb{R}$.

Für ein $O \in M$ stehe für alle $t \in \mathbb{R}$ der Vektor $v(t)$ senkrecht auf dem Ortsvektor $x(t) := \overrightarrow{O, P(t)}$ ($\Leftrightarrow \langle v(t), x(t) \rangle = 0$, wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $V \times V$ bezeichnet).

Läßt sich daraus folgern, daß sich das Teilchen auf einer Kugel mit Mittelpunkt O bewegt?

Aufgabe 5:

Für ein im Raum bewegliches Teilchen sei sein Koordinatenvektor bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems zur Zeit t durch

$$x(t) = \begin{pmatrix} r \cos(wt) \\ r \sin(wt) \\ \frac{hw}{2\pi} t \end{pmatrix}$$

mit $r, w, h \in]0, \infty[$ gegeben.

Bestimmen Sie Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $b(t)$ des Teilchens zur Zeit t.

Zeigen Sie, daß $b(t)$ senkrecht auf $v(t)$ steht und daß $\|v(t)\|_2$ und $\|b(t)\|_2$ unabhängig von t sind.

Abgabetermin: Freitag, 4. Dezember 1998, in der Vorlesung