BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, daß für

$$h : \mathbb{R} \ni y \longmapsto \sqrt{|y|}$$

die Funktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \frac{1}{144}\, t^4 \quad \text{und}$$
$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \ni t \longmapsto 0$$

Lösungen des Anfangswertproblems

$$\ddot{y} = h(y)\,,$$
$$y(0) = 0\,,\ \dot{y}(0) = 0$$

sind.
Bemerkung: Es erhebt sich damit die Frage, wo sich ein Massenpunkt (der Masse 1) zur Zeit $t > 0$ befindet, wenn seine Bewegung unter dem Einfluß der Kraft h auf der y-Achse erfolgt und er zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt ($y = 0$) ruhte.

b) Zeigen Sie, daß

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \pi$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}\, \sin(y)\,,\ (g, l > 0)$$
$$y(0) = \pi,\ \dot{y}(0) = 0$$

ist. Läßt sich vermuten, daß es weitere (auf ganz $\mathbb{R}$ definierte) Lösungen gibt?
Bemerkung: Das Anfangswertproblem beschreibt die Bewegung eines zur Zeit $t = 0$ auf dem Kopf stehenden Pendels.

Aufgabe 2:

Zu $T, G, m_1, m_2, x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20} \in \mathbb{R}$ mit $T, G, m_1, m_2 > 0$ seien $x_i : [0, T[\to \mathbb{R},\ i = 1, 2$, Funktionen mit den Eigenschaften

$$x_2(t) - x_1(t) > 0\,,$$
$$\ddot{x}_1(t) = \frac{G\, m_2}{(x_2(t) - x_1(t))^2} \quad \text{und}$$
$$\ddot{x}_2(t) = -\frac{G\, m_1}{(x_2(t) - x_1(t))^2} \quad \forall t \in [0, T[$$

sowie

$$x_1(0) = x_{10},\ \dot{x}_1(0) = v_{10},$$
$$x_2(0) = x_{20},\ \dot{x}_2(0) = v_{20}.$$

Zeigen Sie:

a) Für

$$s : [0, T[\ni t \longmapsto \frac{1}{m_1 + m_2} \left(m_1 \, x_1(t) + m_2 \, x_2(t)\right)$$

gilt:

$$s(t) = \frac{1}{m_1 + m_2}((m_1 \, v_{10} + m_2 v_{20}) \, t + (m_1 x_{10} + m_2 x_{20})) \quad \forall t \in [0, T[\, .$$

b) Für

$$d : [0, T[\ni t \longmapsto x_2(t) - x_1(t)$$

gilt:

$$\ddot{d}(t) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{d(t)^2} \quad \forall t \in [0, T[\quad \text{sowie}$$
$$d(0) = x_{20} - x_{10} =: d_0 \ , \ \dot{d}(0) = v_{20} - v_{10} =: v_0 \ .$$

c) Es gilt:

$$x_1(t) = s(t) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \, d(t) \quad \text{und}$$
$$x_2(t) = s(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \, d(t) \quad \forall t \in [0, T[\, .$$

d) Mit

$$\Phi :]0, \infty[\ni y \longmapsto -G \, (m_1 + m_2) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{d_0}\right)$$

gilt:

$$|\dot{d}(t)| = \sqrt{v_0^2 - 2 \, \Phi(d(t))} \quad \forall t \in [0, T[\quad (\text{und } d(0) = d_0).$$

Bestimmen Sie d für den Spezialfall $v_0 = -\sqrt{\frac{2 \, G \, (m_1 + m_2)}{d_0}}$. Wie groß kann in diesem Fall T höchstens sein? Geben Sie eine physikalische Interpretation für den in der Aufgabe behandelten Sachverhalt an.

Aufgabe 3:

I sei ein (Zeit)-Intervall mit $I^\circ \neq \emptyset$, $x : I \to \mathbb{R}^3$ und $y : I \to \mathbb{R}^3$ seien $2\times$ differenzierbar, $u \times v$ bezeichne das Vektorprodukt von $u \in \mathbb{R}^3$ mit $v \in \mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, daß dann

$$sp : I \ni t \longmapsto x(t)^\top y(t) \in \mathbb{R} \quad \text{und}$$
$$vp : I \ni t \longmapsto x(t) \times y(t) \in \mathbb{R}^3$$

$2\times$ differenzierbar sind, und berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen von sp und vp.

Zeigen Sie ferner: Ist $\ddot{x}(t)$ ein Vielfaches von $x(t)$ für jedes $t \in I$, so ist

$$I \ni t \longmapsto x(t) \times \dot{x}(t) \in \mathbb{R}^3$$

konstant.
Kann man daraus folgern, daß es ein $u \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ gibt, für das $u^\top x(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt?

Abgabetermin: Freitag, 27. November 1998, in der Vorlesung