BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

M sei ein metrischer Raum, $f, g : M \to \mathbb{R}$ seien Lipschitz-stetig.

Zeigen Sie, daß dann auch folgende Funktionen Lipschitz-stetig sind:

$f+g$, $f-g$, $|f|$, $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\}$,
$\varphi \circ f$, falls $\varphi : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist und D eine $f(M)$ enthaltende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist,
$f \cdot g$, falls f und g beschränkt sind.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß folgende Funktionen Lipschitz-stetig sind, und bestimmen Sie zugehörige Lipschitz-Konstanten:

$f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \sin|\cos(5x-1)|$,
$g : \mathbb{R} \ni x \longmapsto |\cos(\sin 3x+5)| - \frac{1}{2}$,
$f+g$, $f-g$, $|f|$, $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\}$, $\sin \circ g$, g^2 .

Aufgabe 3:

Für $G \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $i \in \{1,\ldots,m\}$ sei $h_i : G \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten L_{h_i}.

Bestimmen Sie eine Lipschitz-Konstante L für

$$h : G \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

in Abhängigkeit von $L_{h_1},\ldots,L_{h_m}$.

Anmerkung: Vereinbarungsgemäß ist $d(x,y) = \|x-y\|_2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$.

Zeigen Sie, daß man für $m = n = 2$, $G = \mathbb{R}^2$,

$$h_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := x_2 \text{ und}$$
$$h_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := -\frac{g}{l}\sin(x_1) \text{ mit } g,l > 0$$

$L = \max\left\{1, \frac{g}{l}\right\}$ wählen kann.

Aufgabe 4:

A sei eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien stetig.

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 5, daß

$$A_1 := \{x \in A \,:\, f(x) = g(x)\} \text{ und}$$
$$A_2 := \{x \in A \,:\, f(x) \leq g(x)\}$$

abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind.

Bemerkung: Insbesondere sind daher für $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ die „Hyperebene“ $\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, a^\top x = \beta\right\}$ und die „abgeschlossenen Halbräume“ $\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, a^\top x \leq \beta\right\}$, $\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, a^\top x \geq \beta\right\}$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die „offenen Halbräume“ $\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, a^\top x > \beta\right\}$, $\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, a^\top x < \beta\right\}$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Anleitung: Mit $h := g - f$ ist $A_1 = A \cap h^{-1}(\{0\})$ und $A_2 = A \cap h^{-1}([0, \infty[)$.

Aufgabe 5:

I sei ein Intervall, $p_1, p_2, r : I \to \mathbb{R}$ seien stetig. Ferner seien

$t_0, t_1 \in I$ mit $t_0 \neq t_1$,
$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$ und $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$,
$\varrho_0, \varrho_1 \in \mathbb{R}$,

und es seien

$$L_0(\varphi) := \alpha_0\, \varphi(t_0) + \beta_0\, \varphi'(t_0)\,,$$
$$L_1(\varphi) := \alpha_1\, \varphi(t_1) + \beta_1\, \varphi'(t_1)$$

für alle differenzierbaren Funktionen $\varphi : I \to \mathbb{R}$.

$\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ seien linear unabhängige Lösungen von

(H) $$y'' + p_1\, y' + p_2\, y = 0\,.$$

Zeigen Sie, daß die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. $\exists_1\ \varphi : I \to \mathbb{R}$:

$$\varphi''(t) + p_1(t)\, \varphi'(t) + p_2(t)\, \varphi(t) = r(t) \quad \forall t \in I \text{ und}$$
$$L_0(\varphi) = \varrho_0,\ L_1(\varphi) = \varrho_1.$$

2.
$$\det \begin{pmatrix} L_0(\varphi_1) & L_0(\varphi_2) \\ L_1(\varphi_1) & L_1(\varphi_2) \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Versuchen Sie, eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu finden, für die

$$\varphi''(t) - \varphi(t) = \sin 2t \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ und}$$
$$\varphi(0) = 1,\ \varphi'(\pi) = 0$$

gilt.

Abgabetermin: Freitag, 20. November 1998, in der Vorlesung