BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik III
für Studierende der Physik D II
(Wintersemester 1998/99)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1:

Zu stetigen Funktionen $p_1, p_2, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$ seien die inhomogene Differentialgleichung

(I) $$y'' + p_1 y' + p_2 y = r$$

und die zugehörige homogene Differentialgleichung

(H) $$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0\ .$$

gegeben. φ_1, φ_2 seien linear unabhängige Lösungen von (H), ψ_0 sei eine Lösung von (I).

Zeigen Sie:

Zu $t_0, \eta, \eta' \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi := \frac{\eta\, \varphi_2'(t_0) - \eta'\, \varphi_2(t_0)}{W_{\varphi_1,\varphi_2}(t_0)}\, \varphi_1 + \frac{\varphi_1(t_0)\, \eta' - \varphi_1'(t_0)\, \eta}{W_{\varphi_1,\varphi_2}(t_0)}\, \varphi_2$$

die eindeutig bestimmte Lösung von (H) mit $\varphi(t_0) = \eta$ und $\varphi'(t_0) = \eta'$.

Bezeichnet $\tilde{\varphi}$ die eindeutig bestimmte Lösung von (H) mit $\tilde{\varphi}(t_0) = \eta - \psi_0(t_0)$ und $\tilde{\varphi}'(t_0) = \eta' - \psi_0'(t_0)$, so ist $\psi := \tilde{\varphi} + \psi_0$ die eindeutig bestimmte Lösung von (I) mit $\psi(t_0) = \eta$ und $\psi'(t_0) = \eta'$.

Aufgabe 2:

Es sei $a_1 := 0,\ a_2 := 0.02,\ a_3 := 1$ und $a_4 := 1.5$.

Bestimmen Sie für $i = 1, \ldots, 4$ die Lösungen $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2a_i \dot{x} + x = 0, \\ &x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$

Erstellen sie die Phasenbilder

$$\{(\varphi_i(t), \dot{\varphi}_i(t)) :\ t \in [0, 100]\},\ i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 3:

Ermitteln Sie die eindeutig bestimmte Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$(*)$ $$\begin{aligned} &\psi''(t) - 2\psi'(t) + \psi(t) = t^2 - 4t + 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ &\psi(1) = 0,\ \psi'(1) = 2\ . \end{aligned}$$

Hinweis: Eine Funktion ψ, die $(*)$ erfüllt, läßt sich mit dem Ansatz $\psi(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ finden.

Aufgabe 4:

Mit $0 \leq a < w_0$ und einer stetigen Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei folgende Differentialgleichung gegeben:

(I) $$\ddot{x} + 2a\dot{x} + w_0^2 x = r \ .$$

Zeigen Sie, daß mit $w := \sqrt{w_0^2 - a^2}$

$$\psi : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t} r(\tau)\, e^{-a(t-\tau)}\, \sin\left(w\,(t-\tau)\right) d\tau$$

(für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$) eine Lösung von (I) ist.

Aufgabe 5:

Mit $0 \leq a < w_0,\ b \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \Omega > 0$ und (der periodischen äußeren Erregung)

$$r : \mathbb{R} \ni t \longmapsto b\, \cos\left(\Omega t\right)$$

sei die Differentialgleichung

(I) $$\ddot{x} + 2a\dot{x} + w_0^2 x = r \ .$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, daß (I) im Fall $a \neq 0$ oder $\Omega \neq w_0$ genau eine Lösung der Form

$$\psi_0 : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \alpha\, \cos\left(\Omega t\right) + \beta\, \sin\left(\Omega t\right)$$

besitzt. Bestimmen Sie α und β.

b) Zeigen Sie, daß es im Fall $a \neq 0$ und $\Omega \neq w_0$ (genau) ein $\delta' \in]0, 2\pi[\ \backslash \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ gibt, für das

$$\psi_0(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, \cos\left(\Omega t + \delta'\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt. Zeigen Sie ferner, daß im vorliegenden Fall für jede Lösung ψ von (I) und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t \to \infty} \left(\psi^{(n)}(t) - \psi_0^{(n)}(t)\right) = 0$$

ist. (ψ_0 heißt daher periodische Grenzlösung von (I).)

c) Bestimmen Sie ψ_0 im Fall $a \neq 0$ und $\Omega = w_0$.

d) Bestimmen Sie im Fall $a = 0$ und $\Omega \neq w_0$ die eindeutig bestimmte Lösung ψ_Ω von (I) mit

$$\psi_\Omega(0) = \psi_\Omega'(0) = 0.$$

Skizzieren sie ψ_Ω. Untersuchen Sie, ob ψ_Ω für $\Omega \to w_0$ gegen eine Lösung von (I) im Resonanzfall $a = 0$ und $\Omega = w_0$ strebt.

Abgabetermin: Freitag, 6. November 1998, in der Vorlesung