BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Höhere Mathematik II
für Studierende der Physik D II
(Sommersemester 1998)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1:

Mit $v_0, \alpha, \beta \in]0, \infty[$ genüge $v \in \mathcal{C}([0, \infty[)$ der *Anfangsbedingung*

$$v(0) = v_0$$

und für alle $t \in [0, \infty[$ mit $v(t) \geq 0$ der *Differentialgleichung*

$$\dot{v}(t) + \beta\, v(t)^\alpha = 0\ .$$

Dabei sei $0^\alpha := 0 \quad \forall \alpha > 0$.

Bemerkung: $v(t)$ beschreibt die Geschwindigkeit eines sich unter dem Einfluß einer geschwindigkeitsabhängigen Reibung bewegenden Körpers zur Zeit t. Dabei entspricht $\alpha = 1$ dem Fall der Stokesschen Reibung, $\alpha = 2$ dem Fall der Newtonschen Reibung. (Vgl. z.B. G.Falk, Theoretische Physik Ia, S. 3–5.)

a) Berechnen Sie $v(t)$ für alle $t > 0$ mit $v|_{[0,t]} > 0$. (Wegen $v_0 > 0$ existiert solch ein t!)
Zeigen Sie, daß im Fall $\alpha \geq 1$ gilt:

$$v(t) > 0 \ \ \forall t \in [0, \infty[\text{ und } \lim_{t \to \infty} v(t) = 0\ .$$

Anleitung: Ist $t > 0$ mit $v|_{[0,t]} > 0$, so gilt

$$-\beta = \dot{v}(\tau)\, v(\tau)^{-\alpha} \ \ \forall \tau \in [0, t]$$

und daher

$$\int_0^t -\beta\, d\tau = \int_0^t \dot{v}(\tau)\, v(\tau)^{-\alpha}\, d\tau = \begin{cases} \frac{v(\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\big|_0^t & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ \ln v(\tau)\big|_0^t & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

woraus $v(t)$ berechnet werden kann.

b) Zeigen Sie, daß im Fall $\alpha \in]0, 1[$ mit $t_0 := \frac{v_0^{1-\alpha}}{\beta\,(1-\alpha)}$ gilt:

$$v|_{[0,t_0[} > 0 \text{ und } v(t_0) = \dot{v}(t_0) = 0\ .$$

c) Unter der Voraussetzung $\alpha \geq 1$ ist der von dem Körper bis zum Zeitpunkt $t \in]0, \infty[$ zurückgelegte Weg durch

$$\int_0^t v(\tau)\, d\tau = -\frac{1}{\beta} \int_0^t \dot{v}(t)\, v(t)^{1-\alpha} d\tau = -\frac{1}{\beta}\big(?\big|_0^t\big)$$

gegeben. Zeigen Sie, daß für $\alpha \in [1, 2[$

$$\int_0^\infty v(\tau)\, d\tau = \frac{v_0^{2-\alpha}}{\beta\,(2-\alpha)}$$

(endliche Weglänge!) und für $\alpha \in [2, \infty[$

$$\int_0^t v(\tau)\, d\tau \underset{(t \to \infty)}{\to} \infty$$

(unendliche Weglänge!) gilt.

Aufgabe 2:

Der Durchmesser einer Mottenkugel habe in einem halben Jahr von $1\ \mathrm{cm}$ auf $\frac{1}{2}\ \mathrm{cm}$ abgenommen. Wann wird die Mottenkugel verschwunden sein, wenn die Verdunstungsgeschwindigkeit (in $\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{s}}$) proportional zur momentanen Oberfläche ist?

Aufgabe 3:

Berücksichtigt man den Einfluß der Luftreibung, so gilt für die Höhe $h(t)$ eines fallenden Körpers der Masse m zur Zeit t:

$$m\,\ddot{h}(t) = -m\,g + k\,\dot{h}(t)^2\ .$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigung und $k > 0$ eine Konstante.

a) Berechnen Sie $\dot{h}(t)$ für $t > 0$ unter der Voraussetzung $\dot{h}(0) = 0$.
b) Untersuchen Sie das Verhalten von $\dot{h}(t)$ für kleine (positive) und große t.

Aufgabe 4:

Gleichzeitige Luftdruck- und Temperaturmessungen auf einer Tal- und einer Bergstation mögen folgende Werte ergeben haben:

Station	**Druck [mb]**	**Temperatur [°C]**
Tal	986.8	17
Berg	889.9	4

Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen Berg- und Talstation unter der Annahme folgender Voraussetzungen:
Bezeichnet $p(h)$ den Luftdruck (in mb), $t(h)$ die Lufttemperatur (in °C) und $\varrho(h)$ die Dichte der Luft (in $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$) in der Höhe $h \in [h_0, h_1]$, wobei h_0 die Höhe der Talstation und h_1 die Höhe der Bergstation sei, so gelte:

$$\varrho(h) = 1.273 \cdot 10^{-3}\,p(h)\left(1 + \frac{1}{273}\,t(h)\right)^{-1},$$

$$p(h) - p(h_0) = -9.81 \cdot 10^{-2} \int_{h_0}^{h} \varrho(h)\,dh\ ,$$

$$t(h) = t(h_0) + \frac{h - h_0}{h_1 - h_0}\,(t(h_1) - t(h_0))\ .$$

(Überlegen Sie sich, auf welchen physikalischen Gesetzen die ersten beiden Gleichungen beruhen!)

Abgabetermin: 30. Juni 1998