BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Deterministische Methoden der globalen Optimierung
(Sommersemester 1997)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

Für $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $Y \in (IS)^n$ mit $Y \subset D_f$ und $m \in S^n \cap Y$ heiße

$$u = (u_{-1}, u_0, u_1, \ldots, u_n) \in (IS)^{1\times(n+2)}$$

pWeSt-Einschließung von f auf Y bezüglich m, falls gilt:

0) $f(m) \in u_{-1}$,
I) $f(Y) \subset u_0$,
II) $\forall y \in Y \; \exists \xi_i \in u_i \,,\; i = 1, \ldots, n : \quad f(y) - f(m) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (y_i - m_i)$.

a.) Geben Sie pWeSt-Einschließungen für konstante Funktionen und Projektionen an.

b.) u (v) sei eine pWeSt-Einschließung von f (g) auf Y bezüglich m.
Versuchen Sie daraus pWeSt-Einschließungen $w = (w_{-1}, w_0, w_1, \ldots, w_n)$ von h auf Y bezüglich m zu gewinnen für

$h = f \overset{+}{(-)} g$,
$h = f * g$,
$h = f/g$ ($0 \notin v_{-1}$ und $0 \notin v_0$ vorausgesetzt) ,
$h = s \circ f$ (bei geeigneten Voraussetzungen an $s : D_s \to \mathbb{R}$ mit $D_s \subset \mathbb{R}$) insbesondere für $s = \mathrm{abs}$,
$h = \min\{f, g\}$,
$h = \max\{f, g\}$.

Ziel sollte es dabei sein, für w_0 einen möglichst kleinen Durchmesser zu erreichen.

Aufgabe 2:

a.) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei symmetrisch, $\underline{\sigma}$ der kleinste, $\overline{\sigma}$ der größte Eigenwert von A.
Zeigen Sie:
$$\underline{\sigma} = \min_{\|x\|_2=1} x^\top A x \;, \quad \overline{\sigma} = \max_{\|x\|_2=1} x^\top A x \;.$$
Anleitung: Verwenden Sie eine aus Eigenvektoren von A bestehende Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

b.) $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien symmetrisch. Dann ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch $A_t := (1-t)A_0 + tA_1$ symmetrisch.
$\underline{\sigma}(t)$ bezeichne den kleinsten, $\overline{\sigma}(t)$ den größten Eigenwert von A_t .

1. Zeigen Sie mit Hilfe von a.), daß für alle $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ gilt:
$|\underline{\sigma}(t_1) - \underline{\sigma}(t_0)| \le \|A_1 - A_0\|_2 \, |t_1 - t_0|$,
$|\overline{\sigma}(t_1) - \overline{\sigma}(t_0)| \le \|A_1 - A_0\|_2 \, |t_1 - t_0|$.
($\underline{\sigma}$ und $\overline{\sigma}$ sind also Lipschitz-stetige Funktionen mit der Lipschitzkonstanten $\|A_1 - A_0\|_2$.)
2. Zeigen Sie mit Hilfe von 1.:
Ist A_t regulär für jedes $t \in [0,1]$, so gilt:
Entweder ist A_t für jedes $t \in [0,1]$ positiv definit, oder für kein $t \in [0,1]$.

Aufgabe 3:

Gegeben seien eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit offenem $D \subset \mathbb{R}^n$, ein $Y \in (IS)^n$ mit $Y \subset D$ und ein $m \in S^n \cap Y$.

Zeigen Sie:

Ist $Hf(m)$ positiv definit und $Hf(y)$ regulär für jedes $y \in Y$, so ist $Hf(y)$ positiv definit für jedes $y \in Y$ (und folglich $f|_Y$ strikt konvex).

Aufgabe 4:

Für $Y \in (IS)^n$ sei

$$qs := \left\{ \|y\|_2^2 \, : \, y \in Y \right\}$$

und

$$\mathrm{abs}(Y[i]) := \{|\eta| \, : \, \eta \in Y[i]\} \, , \; i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$qs = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\inf\left(\mathrm{abs}(Y[i])\right)\right)^2 , \; \sum_{i=1}^{n} \left(\sup\left(\mathrm{abs}(Y[i])\right)\right)^2 \right] .$$

Skizzieren Sie einen in Pascal-XSC implementierbaren Algorithmus, mit dem man (bei nicht zu drastischer Beschränkung von $n \in \mathbb{N}$) für jedes $Y \in (IS)^n$ feststellen kann, ob es ein $y \in Y$ mit $\|y\|_2 = 1$ gibt oder nicht.

Hinweis:
Für Pascal-XSC gilt: Existieren $l := \min\{\xi \in S \, : \, \xi \geq \min qs\}$ und $u := \max\{\xi \in S \, : \, \xi \leq \max qs\}$, so ist $1 \in qs$ ganau dann, wenn $1 \in [l, u]$ ist ($1 \in S$!).

Abgabetermin: Montag, 2. Juni 1997