BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Deterministische Methoden der globalen Optimierung
(Sommersemester 1997)

Übungsblatt 2

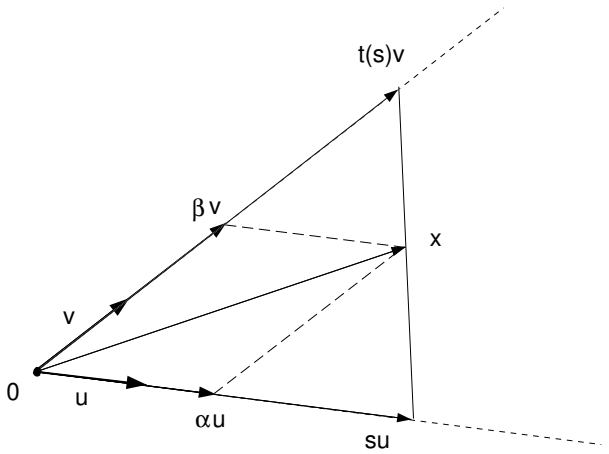
Aufgabe 1:

$u, v \in \mathbb{R}^2$ seien linear unabhängig, $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$, $x = \alpha u + \beta v$ mit $\alpha, \beta > 0$.

a.) Zeigen Sie: Zu jedem $s > \alpha$ gibt es (genau) ein $t(s) > 0$ mit
$x \in \{\lambda(su) + (1-\lambda)t(s)v \,:\, \lambda \in [0,1]\}$.

b.) Für $s > \alpha$ bezeichne $F(s)$ den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken 0, su, $t(s)v$.
Zeigen Sie, daß es ein eindeutig bestimmtes $s_{min} > \alpha$ gibt, für das
$F|_{]\alpha, s_{min}]}$ streng monoton fällt und $F|_{[s_{min}, \infty[}$ streng monoton wächst.
Bestimmen Sie s_{min}, $\|x - s_{min}u\|_2$ und $\|x - t(s_{min})v\|_2$.

c.) Beschreiben Sie eine einfache geometrische Konstruktion von $s_{min}u$ und $t(s_{min})v$.



Aufgabe 2:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei erklärt durch

$$f(x) := x_1^2\Big(4 + x_1^2\Big(\tfrac{x_1^2}{3} - \tfrac{21}{10}\Big)\Big) + 4x_2^2(x_2^2 - 1) + x_1x_2 \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ .$$

(f ist die sogenannte “six hump camel back function”)

Für die im PASCAL-XSC-Programm `M_S_T__4` enthaltene `function` F gilt dann $\inf f(Y) \in F(Y)$, falls Y ein 2–dimensionaler Maschinenintervallvektor bezüglich des Gleitpunktsystems $S(10, 13, -98, 100)$ ist und $F(Y)$ berechnet wird.

Schreiben Sie die `function` F so um, daß sie ihren Zweck auch bei einem Gleitpunktsystem zur Basis 2 erfüllt.

Versuchen Sie damit Einschließungen von $\inf f(X)$ für

$$X = \Big\{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2.5 \le x_1 \le 2.5,\ -1.5 \le x_2 \le 1.5\Big\}$$

und

$$X = \Big\{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2.5 \le x_1 \le 2.5,\ x_2 = 0\Big\}$$

bei unterschiedlichen Genauigkeitsansprüchen zu berechnen.

Untersuchen Sie, wie sich die Ergebnisse ändern, wenn man F durch die folgende (einfachere) `function` ersetzt:

```
function F(Y:ivector):interval;
var y1q,y2q:interval;
begin
   y1q:=sqr(Y[1]); y2q:=sqr(Y[2]);
   F:=y1q*(4+y1q*(y1q/3-21/10))+4*y2q*(y2q-1)+Y[1]*Y[2]
end;
```

(Man hat dann sogar $f(Y) \subset F(Y)$ für jeden Maschinenintervallvektor Y, für den $F(Y)$ berechnet wird!)

Aufgabe 3:

a.) Programmieren Sie eine Inklusionsfunktion F für
$f : D \ni (x_1, x_2, x_3)^\top \longmapsto \frac{x_1}{x_2+2} + \frac{x_2}{x_3+2} + \frac{x_3}{x_1+2}$
mit
$D := \left\{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_i \neq -2,\ i = 1, 2, 3\right\}$,
und versuchen Sie damit
$\inf f\left(\left\{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x_i| \leq 1,\ i = 1, 2, 3\right\}\right)$
einzuschließen.

b.) Programmieren Sie eine Inklusionsfunktion F für
$f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2)^\top \longmapsto \max\left\{\sin(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 + \frac{1}{4}\right\}$,
und versuchen Sie damit
$\inf f\left(\left\{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x_i| \leq 1,\ i = 1, 2\right\}\right)$
einzuschließen.

c.) Programmieren Sie eine Inklusionsfunktion F für
$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2)^\top \longmapsto \begin{cases} x_1 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + x_2|x_1| & \text{falls } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x_1 = 0 \end{cases},$$
und versuchen Sie damit
$\inf f\left(\left\{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x_1| \leq 1 \text{ und } |x_2 - 1| \leq 1\right\}\right)$
einzuschließen.

Aufgabe 4:

D sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, Y ein in D enthaltener Intervallvektor und $m \in Y$. Weiter sei für $i = 1, \ldots, n$

$$Y_i := \left\{(x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \,:\, x_j \in Y[j] \text{ falls } j \leq i \text{ und } x_j = m_j \text{ falls } j > i\right\} .$$

Zeigen Sie, daß für jedes $y \in Y$

$$f(y) \in \left\{f(m) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_i)\partial_i f(\eta_i) \,:\, \eta_i \in Y_i\,,\ i = 1, \ldots, n\right\}$$

und folglich auch

$$f(Y) \subset \left\{f(m) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_i)\partial_i f(\eta_i) \,:\, y_i \in Y[i] \text{ und } \eta_i \in Y_i\,,\ i = 1, \ldots, n\right\}$$

gilt.

Abgabetermin: Montag, 28. April 1997