BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7

MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Deterministische Methoden der globalen Optimierung

(Sommersemester 1997)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Zu $x^i \in \mathbb{R}^n$ und (Gewichten) $p_i \in \mathbb{R}$ mit $p_i > 0,\ i = 1, \ldots, k,$ sei

$$f : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto \sum_{i=1}^{k} p_i \left\| x - x^i \right\|_2^2.$$

$\left(\|y\|_2 := \left(y^\top y\right)^{\frac{1}{2}} \ \forall y \in \mathbb{R}^n \right).$

Zeigen Sie: Für

$$s := \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{k} p_i x^i$$

gilt

$$f(s) < f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{s\}.$$

Bemerkung: Befindet sich für $i = 1, \ldots, k$ am Ort x^i ein Massenpunkt mit der Masse p_i, so ist s der Ort des Schwerpunktes dieser Massenpunkte.

Aufgabe 2:

Zu

$a = (a_1, \ldots, a_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i < 0,\ i = 1, \ldots, n,$ und
$b = (b_1, \ldots, b_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ mit $b_i > 0,\ i = 1, \ldots, n,$

sei

$$D := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n : \ a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, \ldots, n \right\} \text{ und}$$
$$E := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n : \ x_i \in \{a_i, b_i\} \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \right\} \text{ (die Menge der Ecken von } D).$$

Zeigen Sie, daß für

$$f : D \ni x \longmapsto \|x\|_2 \quad \left(:= \left(x^\top x\right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

jedes $x \in E$ eine strenge lokale Maximalstelle von f ist.

Aufgabe 3:

V sei ein reeller Vektorraum, $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n)^\top \longmapsto \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right\|$$

eine Norm ist.

Welche der folgenden Funktionen sind Normen?

$$\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3)^\top \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} \left| x_1 \cos^2 t + x_2 \sin^2 t + x_3 \right| dt \ ,$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2)^\top \longmapsto \left(\int_{-\pi}^{\pi} (x_1 \cos t + x_2 \sin t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n)^\top \longmapsto \max_{t \in [0,1]} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i t^i \right| \ .$$

Aufgabe 4:

$\|\cdot\|$ sei eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{C}$ die Menge aller nichtleeren kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Ferner sei für alle $A \in \mathfrak{C}$ und $\varrho > 0$

$$A_\varrho := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in A : \|y - x\| \leq \varrho\}.$$

Dann ist

$$d : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \ni (A, B) \longmapsto \inf \{\varrho > 0 : \ A \subset B_\varrho \text{ und } B \subset A_\varrho\}$$

eine Metrik mit der Eigenschaft:

Jede (bezüglich d) beschränkte Folge $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{C}$ besitzt eine (bezüglich d gegen ein $A \in \mathfrak{C}$) konvergente Teilfolge. (d ist die sogenannte *Hausdorff-Metrik* (bezüglich $\|\cdot\|$).)

Zeigen Sie:

a.) Ist $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine (bezüglich d) konvergente Folge von konvexen Mengen aus $\mathfrak{C}$, so ist auch $\lim\limits_{\nu \to \infty} A_\nu$ konvex.

b.) Ist $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine (bezüglich d) konvergente Folge von Intervallvektoren im $\mathbb{R}^n$, so ist auch $\lim\limits_{\nu \to \infty} A_\nu$ ein Intervallvektor im $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Intervallvektoren im $\mathbb{R}^n$ sind Mengen der Form

$$\left\{ x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n : \ a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, \ldots, n \right\} \text{mit } a_i, b_i \in \mathbb{R} : \ a_i \leq b_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Abgabetermin: Montag, 21. April 1997, in der Vorlesung