BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7

MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Anwendungen der analytischen Geometrie und der Differentialgeometrie

(Sommersemester 1996)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1:

a.) Zeigen Sie, daß für jedes $O \in \mathcal{M}$ (die Spiegelung an O)
$T : \mathcal{M} \ni P \longmapsto P + 2\,\vec{PO}$
eine Isometrie mit der Eigenschaft $T^2 = id_{\mathcal{M}}$ ist. Ist T eine Bewegung?

b.) Zeigen Sie, daß für jedes $O \in \mathcal{M}$ und jedes $n \in \mathcal{V}$ mit $\|n\| = 1$
(die Spiegelung an der Geraden $\{O + \lambda n : \lambda \in \mathbb{R}\}$)
$T : \mathcal{M} \ni P \longmapsto P + 2\,\overrightarrow{P, O + \left(\vec{OP} \cdot n\right) n}$
eine Isometrie mit der Eigenschaft $T^2 = id_{\mathcal{M}}$ ist. Ist T eine Bewegung?

c.) Zeigen Sie, daß für jedes $O \in \mathcal{M}$ und jedes $n \in \mathcal{V}$ mit $\|n\| = 1$
(die Spiegelung an der Ebene $\{O + v : v \cdot n = 0\}$)
$T : \mathcal{M} \ni P \longmapsto P + 2\left(\vec{PO} \cdot n\right) n$
eine Isometrie mit der Eigenschaft $T^2 = id_{\mathcal{M}}$ ist. Ist T eine Bewegung?

Aufgabe 2:

$T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ sei eine Bewegung. Zeigen Sie:

a.) Gilt $L_T(n) = n$ für ein $n \in \mathcal{V}$ mit $\|n\| = 1$, so ist für jedes $Q \in \mathcal{M}$
$\hat{T} : \mathcal{M} \ni P \longmapsto T(P) + \overrightarrow{T(Q), Q}$
eine Drehung um die Achse $\{Q + \lambda n : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

b.) Zu jedem $Q \in \mathcal{M}$ gibt es eine Drehung $\hat{T}$ um eine durch Q gehende Achse und ein $v \in \mathcal{V}$ derart, daß gilt:
$T(P) = \hat{T}(P) + v \quad \forall P \in \mathcal{M}$.
(„Jede Bewegung kann durch eine Achsendrehung um einen beliebigen Punkt und eine anschließende Verschiebung realisiert werden.“)

Kann jede Bewegung auch durch eine Verschiebung und eine anschließende Achsendrehung realisiert werden?

Aufgabe 3:

Schreiben Sie ein Pascal-Programm, das folgendes leistet:

Für eine einzugebende Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ wird geprüft, ob A eigentlich orthogonal ist.
Ist A eigentlich orthogonal, so wird oder werden berechnet:

- falls $a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$: die zu A gehörigen Eulerschen Winkel $(\varphi, \psi \in]-\pi, \pi], \vartheta \in]0, \pi[: A = R_z(\varphi) R_x(\vartheta) R_z(\psi))$,
- falls $a_{13} = a_{23} = 0$ und $a_{33} = 1$: der eindeutig bestimmte Winkel $\psi \in]-\pi, \pi]$, für den $A = R_z(\psi)$ gilt,
- falls $a_{13} = a_{23} = 0$ und $a_{33} = -1$: der eindeutig bestimmte Winkel $\varphi \in]-\pi, \pi]$, für den $A = R_z(\varphi) R_x(\pi)$ gilt.

Wenden Sie das Programm auf folgende Matrizen an:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In den folgenden Aufgaben bezeichne I eine reelles (Zeit-)Intervall.

Aufgabe 4:

$(O, O + w_1, O + w_2, O + w_3)$ sei ein cartesisches Koordinatensystem von $\mathcal{M}$.

Zu $\varphi : I \ni t \longmapsto \varphi(t) \in \mathcal{M}$ sei $\varphi_i : I \ni t \longmapsto \overrightarrow{O, \varphi(t)} \cdot w_i$, $i = 1, 2, 3$.

Zeigen Sie:

a.) φ ist in $t_0 \in I$ genau dann stetig, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in t_0 stetig sind.

b.) Für ein $t_0 \in I$ existiert die Geschwindigkeit

$$\lim_{I \setminus \{t_0\} \ni t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \overrightarrow{\varphi(t_0), \varphi(t)} =: v(t_0)$$

genau dann, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in t_0 differenzierbar sind.
Existiert $v(t_0)$, so gilt $v(t_0) = \dot{\varphi}_1(t_0)w_1 + \dot{\varphi}_2(t_0)w_2 + \dot{\varphi}_3(t_0)w_3$.

c.) Existiert die Geschwindigkeit $v(t)$ für alle $t \in I$, so existiert die Beschleunigung

$$\lim_{I \setminus \{t_0\} \ni t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(v(t) - v(t_0)) =: b(t_0)$$

in $t_0 \in I$ genau dann, wenn $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ in t_0 differenzierbar sind.
Existiert $b(t_0)$, so ist $b(t_0) = \ddot{\varphi}_1(t_0)w_1 + \ddot{\varphi}_2(t_0)w_2 + \ddot{\varphi}_3(t_0)w_3$.

Aufgabe 5:

Zeigen Sie:
Sind die Abbildungen $I \ni t \longmapsto \psi_i(t) \in \mathcal{V}$, $i = 1, 2$, differenzierbar, so sind auch die Abbildungen

$$s_p : I \ni t \longmapsto \psi_1(t) \cdot \psi_2(t) \in \mathbb{R} ,$$
$$v_p : I \ni t \longmapsto \psi_1(t) \times \psi_2(t) \in \mathcal{V}$$

differenzierbar. ($\times$ sei das Vektorprodukt bezüglich einer Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$.)
Dabei gilt:

$$\dot{s}_p(t) = \dot{\psi}_1(t) \cdot \psi_2(t) + \psi_1(t) \cdot \dot{\psi}_2(t) ,$$
$$\dot{v}_p(t) = \dot{\psi}_1(t) \times \psi_2(t) + \psi_1(t) \times \dot{\psi}_2(t)$$

für alle $t \in I$.

Aufgabe 6:

Für alle $t \in I$ sei $\mathfrak{c}(t) := (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$.
Die Abbildungen $I \ni t \longmapsto e_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, seien differenzierbar.
$\mathfrak{c}(t)$ sei für alle (ein) $t \in I$ gleichorientiert mit der Orthonormalbasis $\mathfrak{b} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathcal{V}$.
$\times$ bezeichne das zu $\mathfrak{b}$ gehörige Vektorprodukt.

Zeigen Sie:
Mit

$$n : I \ni t \longmapsto (\dot{e}_2(t) \cdot e_3(t))e_1(t) + (\dot{e}_3(t) \cdot e_1(t))e_2(t) + (\dot{e}_1(t) \cdot e_2(t))e_3(t)$$

gilt

$$\dot{e}_i(t) = n(t) \times e_i(t) , \ i = 1, 2, 3, \ \forall t \in I.$$

Hinweis: Dieses Übungsblatt wird (mangels Gelegenheit) nicht mehr in den die Vorlesung begleitenden Übungen besprochen. Dennoch werden Lösungen (dankend) entgegengenommen und (durch den dankbaren Übungsgruppenleiter) korrigiert. Die Bearbeitung ist freigestellt, kann aber zur Erreichung der für die Scheinvergabe notwendigen Mindestpunktzahl verwendet werden!

Abgabetermin: Freitag, 12. Juli 1996, in der Vorlesung.

Erholsame Ferien!