BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Anwendungen der analytischen Geometrie und der Differentialgeometrie
(Sommersemester 1996)

Übungsblatt 8

Als Modell für den uns umgebenden Raum diene ein dreidimensionaler euklidischer Punktraum $\mathcal{M}$ bezüglich $\mathcal{V}$.

- ϱ bezeichne die euklidische Metrik auf $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$,
- $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm auf $\mathcal{V}$ und
- $\cdot$ das zugehörige Skalarprodukt auf $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Aufgabe 1:

$S(t) \in \mathcal{M}$ bezeichne den Ort eines beweglichen Senders zur Zeit $t \in \mathbb{R}$.

Zu jedem der Zeitpunkte

$$t_i = t_0 + i\Delta t\ ,\ i = 0, 1, \ldots,\ (\Delta t > 0)$$

gebe der Sender ein sich kugelförmig um $S(t_i)$ mit der Geschwindigkeit $c > 0$ ausbreitendes Signal σ_i ab. σ_i kann dann zur Zeit $t \geq t_i$ genau an den Orten $E \in \mathcal{M}$ mit

$$\varrho(S(t_i), E) = c\,(t - t_i)$$

empfangen werden.

Mit $E_0 \in \mathcal{M}$ und $v \in \mathcal{V}$ sei

$$E(t) = E_0 + (t - t_0)\,v$$

der Ort eines (für $v \neq 0$ gleichförmig bewegten, für $v = 0$ ruhenden) Empfängers zur Zeit $t \in \mathbb{R}$.

a.) Unter welchen Voraussetzungen erreicht σ_i den Empfänger?
Falls σ_i den Empfänger erreicht, zu welchen Zeitpunkten ist dies der Fall?

Anleitung: Begründen Sie, daß σ_i den Empfänger genau dann erreicht, wenn es ein $t \geq t_i$ gibt, für das gilt:

$$\Delta_i(t) \cdot \Delta_i(t) = c^2(t - t_i)^2 \text{ mit } \Delta_i(t) := \overrightarrow{S(t_i), E(t_i)} + (t - t_i)\,v.$$

b.) Es zeigt sich, daß σ_i unter der Voraussetzung $\|v\| < c$ zu genau einem Zeitpunkt $t_i^* \geq t_i$ den Empfänger erreicht.
Untersuchen Sie das Frequenzverhältnis $\frac{1/(t_{i+1}^* - t_i^*)}{1/(t_{i+1} - t_i)}$ für die Fälle

(i) $S(t) = S(t_0)\ \forall t \in \mathbb{R}$ (ruhender Sender) und
$v = \lambda \overrightarrow{S(t_0), E(t_0)}$ mit $|\lambda| \left\| \overrightarrow{S(t_0), E(t_0)} \right\| < c$,

(ii) $v = 0$ (ruhender Empfänger) und
$S(t) = S_0 + \lambda\,(t - t_0)\,\overrightarrow{S(t_0), E(t_0)}\ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

(Standardbeispiele zur Demonstration des Dopplereffektes)

Aufgabe 2:

$\mathfrak{b} := (v_1, v_2, v_3)$ sei eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$. Dabei sei als Längeneinheit $1\ \mathrm{km}$ gewählt.
Mit $O \in \mathcal{M}$ sei $S := O + 10v_1$. In S finde zur Zeit $t_0 = 0$ eine Explosion statt.

Wann hört ein Beobachter, der sich zur Zeit t (in Stunden gemessen) am Ort

$$E(t) = O + 10v_3 + 1600tv_1$$

befindet, den Knall? Für die Schallgeschwindigkeit werde $1200\ [\mathrm{km/Std}]$ angenommen.

Aufgabe 3:

$S := (P_0, P_1, P_2, P_3)$ und $T := (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ seien Koordinatensysteme von $\mathcal{M}$.

S heißt *stetig deformierbar in* T (in Zeichen $S \approx T$), wenn es ein Intervall $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ und stetige Abbildungen

$$I \ni t \longmapsto P_i(t) \in \mathcal{M},\ i = 0, 1, 2, 3,$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) Für jedes $t \in I$ ist $S(t) := (P_0(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t))$ ein Koordinatensystem von $\mathcal{M}$,
(ii) $S(t_0) = S,\ S(t_1) = T$.

Zeigen Sie:

a.) $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation,
b.) $S \approx T \ \Leftrightarrow$ S und T sind gleich orientiert,
c.) $\approx$ zerlegt die Menge der Koordinatensysteme von $\mathcal{M}$ in genau zwei Äquivalenzklassen.

Aufgabe 4:

Schreiben Sie ein Pascal-Programm zur Berechnung der Projektionsebenenkoordinaten XP, YP.

Testen Sie das Programm für die durch

$$\begin{pmatrix} VRPx \\ VRPy \\ VRPz \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} VPNx \\ VPNy \\ VPNz \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ -2.0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} VUPx \\ VUPy \\ VUPz \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

und

$$PRP := VRP + 40 \cdot VPN$$

definierte Perspektive und die Punkte mit den Koordinatenvektoren

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ -40.0 \\ 80.0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0.0 \\ 40.0 \\ 0.0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -20.0 \\ 120.0 \\ -40.0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -50.0 \\ -50.0 \\ 100.0 \end{pmatrix}.$$

Abgabetermin: Freitag, 5. Juli 1996, in der Vorlesung