



Automaten, Sprachen, Berechenbarkeit

Sommersemester 2019

Zugabe zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Turingmaschine)

Geben Sie eine Turingmaschine an, die folgende Funktion f_T berechnet:

$$f_T : \{0, 1\}^+ \rightarrow \{0, 1\}^+ \quad f_T(w) = \begin{cases} w & \text{falls } w = \text{bin}(n) \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei beschreibt $\text{bin}(n)$ die Dualdarstellung einer Zahl n , die für $x > 0$ stets mit der Ziffer 1 beginnt.

Lösung: T hält verwerfend an, falls $w = \varepsilon$ (nur $\square$ auf dem Band) oder falls (mindestens) eine führende 0 auf dem Band steht. Ansonsten hält T in der Finalkonfiguration über dem ersten Zeichen: $T = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \square, \{q_1\})$ mit

$$\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, N)$$

Eine Variante der obigen Turingmaschine für $n \in \mathbb{N}_0$, die also auch $w = \text{bin}(0) = 0$ akzeptiert: $T = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \square, \{q_2\})$ mit

$$\delta(q_0, 0) = (q_1, 0, R)$$

$$\delta(q_0, 1) = (q_2, 1, N)$$

$$\delta(q_1, \square) = (q_2, \square, L)$$

Aufgabe 2 (Turingmaschine)

Konstruieren Sie eine Turingmaschine, die folgende Funktion f_T berechnet:

$$f_T : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1,\#\}^*, \quad f_T(w) = w\#w.$$

Lösung:

- a) Schreibe zunächst ein # ans Ende des Wortes: $01010101010 \rightarrow 01010101010\#$
b) Ersetze nacheinander die Zahlen des ursprünglichen Worts durch Buchstaben und schreibe diese ans Ende des erweiterten Wortes, also auf das erste $\square$:

$$01010101010\#\square \rightarrow A1010101010\#0 \rightarrow AB010101010\#01 \rightarrow \dots$$

- c) Sind alle Zahlen im ursprünglichen Wort durch A und B ersetzt, so ist der Kopiervorgang abgeschlossen und die As und Bs können wieder durch 0 und 1 ersetzt werden.

$$\delta(q_0, e) = (q_0, e, R), \quad e \in \{0,1\}$$

$$\delta(q_0, \square) = (q_1, \#, L)$$

Füge # am Ende ein

$$\delta(q_1, e) = (q_1, e, L), \quad e \in \{0,1\}$$

$$\delta(q_1, \square) = (q_2, \square, R)$$

Gehe zum Anfang des Wortes

$$\delta(q_2, 0) = (q_3, A, R)$$

$$\delta(q_2, 1) = (q_4, B, R)$$

Ersetze erste 0 / 1

$$\delta(q_3, e) = (q_0, e, R), \quad e \in \{0,1,\#\}$$

$$\delta(q_3, \square) = (q_5, 0, L)$$

Schreibe 0 ans Ende

$$\delta(q_4, e) = (q_0, e, R), \quad e \in \{0,1,\#\}$$

$$\delta(q_4, \square) = (q_5, 1, L)$$

Schreibe 1 ans Ende

$$\delta(q_5, e) = (q_5, e, L), \quad e \in \{0,1,\#\}$$

$$\delta(q_5, e) = (q_2, e, R), \quad e \in \{A,B\}$$

Suche 1. noch nicht ersetztes Zeichen

$$\delta(q_2, \#) = (q_6, \#, L)$$

Alle Zeichen vom ursprünglichen w ersetzt

$$\delta(q_6, A) = (q_6, 0, L)$$

$$\delta(q_6, B) = (q_6, 1, L)$$

Ersetze A/B durch 0/1

$$\delta(q_6, \square) = (q_E, \square, R)$$

Ende

Aufgabe 3 (Turingmaschine)

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt unär kodiert, wenn $n = \sum_{j=1}^n i_j 1^j$ mit $i_j = 1 \forall j$, oder kurz $n = 1^n$.

Geben Sie eine Turingmaschine T an, die für zwei natürliche, unär kodierte Zahlen n und m , die durch ein $\#$ getrennt sind, die unär kodierte Summe $n + m$ berechnet.

Lösung:

- a) Erste 1 mit $\square$ überschreiben

$$\delta(q_0, 1) = (q_1, \square, R)$$

- b) $\#$ mit 1 überschreiben

$$\delta(q_1, 1) = (q_1, 1, R)$$

$$\delta(q_1, \#) = (q_2, 1, L)$$

- c) Zum Anfang zurückkehren

$$\delta(q_2, 1) = (q_2, 1, L)$$

$$\delta(q_2, \square) = (q_3, \square, R)$$

Aufgabe 4 (LBA)

Konstruieren Sie einen linear beschränkten Automaten T_n mit $L(T_n) = \{a^i b^j c^i, i \in \mathbb{N}\}$.

Lösung: Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\$, \#, x, \square\}$. Wir gehen wie folgt vor:

a) Überprüfe, ob das Wort der Form $a^i b^j c^k$ genügt.

b) Überprüfe ob $i = j = k$ ist.

Zu a): Überprüfe ob $w = a^i b^j c^k$

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, a) = (q_1, a, R) & \delta(q_2, b) = (q_2, b, R) & \delta(q_3, c) = (q_3, c, R) \\ \delta(q_1, a) = (q_1, a, R) & \delta(q_2, c) = (q_3, c, R) & \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, L) \\ \delta(q_1, b) = (q_2, b, R), & & \end{array}$$

und kehre zum Anfang des Wortes zurück:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_4, a) = (q_4, a, L) & \delta(q_4, b) = (q_4, b, L) & \delta(q_4, c) = (q_4, c, L) \\ \delta(q_4, \$) = (q_5, \$, R). & & \end{array}$$

Zu b): Um zu überprüfen ob $i = j = k$, überschreiben wir abwechselnd das erste a , dann das erste b und dann das erste c mit x und kehren zum ersten a zurück. Wiederholt man diese Prozedur und ist $i = j = k$, so stehen am Ende nur noch x auf dem Band. In diesem Fall wechseln wir in den einzigen Akzeptanzzustand q_E .

Überschreibe das erste a mit x (und stelle fest, ob nur noch x auf dem Band stehen):

$$\delta(q_5, x) = (q_5, x, R) \quad \delta(q_5, a) = (q_6, x, R) \quad \delta(q_5, \#) = (q_E, \#, N).$$

Überschreibe das erste b mit x :

$$\delta(q_6, a) = (q_6, a, R) \quad \delta(q_6, x) = (q_6, x, R) \quad \delta(q_6, b) = (q_7, x, R).$$

Überschreibe das erste c mit x :

$$\delta(q_7, b) = (q_7, b, R) \quad \delta(q_7, x) = (q_7, x, R) \quad \delta(q_7, c) = (q_8, x, L).$$

Kehre anschließend zum ersten a zurück:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_8, x) = (q_8, x, L) & \delta(q_8, b) = (q_8, b, L) & \delta(q_8, a) = (q_8, a, L) \\ \delta(q_8, \$) = (q_5, \$, R). & & \end{array}$$