BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Klausur

Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Mindestpunktzahl: 14 (von 23 erreichbaren)

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Mit $t, h \in \mathbb{R},\ h > 0$ sei $\varphi : [t-h, t+h] \to \mathbb{R}^n$ viermal stetig differenzierbar.

Zeigen Sie:

a)

$$\Delta := \frac{\varphi(t-h) - 2\varphi(t) + \varphi(t+h)}{h^2} - \varphi''(t) = \frac{1}{6h^2} \int_{t-h}^{t+h} \kappa(x)\, \varphi^{(4)}(x)\, dx$$

mit

$$\kappa(x) := \begin{cases} (-t+h+x)^3 & \text{falls } t-h \le x \le t \\ (t+h-x)^3 & \text{falls } t \le x \le t+h\ . \end{cases}$$

b)

$$\|\Delta\| \le \frac{h^2}{12} \max_{x \in [t-h, t+h]} \left\| \varphi^{(4)}(x) \right\|$$

für jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$.

Anleitung: Verwenden Sie Aufgabe 4 auf Übungsblatt 2 mit $k = 4,\ \alpha = t,\ \beta = t-h, t+h$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß es genau eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit

$$\begin{aligned} &\varphi_1'(x) = 2\, \varphi_1(x) + x^2\, \varphi_2(x)\ , \\ &\varphi_2'(x) = \sin(x)\, \varphi_1(x) + \cos(x)\, \varphi_2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \\ &\varphi_1(0) = 1 \ \text{ und } \ \varphi_2(0) = 1 \end{aligned}$$

gibt.

Schätzen Sie $\|\varphi(1)\|_\infty$ nach oben ab.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = \cos(t+y) \ , \ (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ , \\ y(0) = y_0 \ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß es für $\Delta t = 1$ genau eine Folge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ gibt, für die

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2}(f(n\Delta t, y_n) + f(n\Delta t + \Delta t, y_{n+1})) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

gilt.

Bemerkung: $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist die durch Anwendung der Trapezmethode zur Schrittweite $\Delta t = 1$ erzeugte Approximationsfolge für $\{\varphi(n\Delta t)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeigen Sie, daß das Randwertproblem

(RWP)
$$\begin{aligned} &y'' - 16\left(x - \frac{1}{2}\right)y' - x^2 y = 3 \ , \ x \in [0,1] \ , \\ &y(0) = 1 \ , \ y(1) = -1 \end{aligned}$$

genau eine Lösung hat.

Ist die Matrix $\tilde{A}$ des bei Anwendung der Methode der zentralen Differenzen auf (RWP) für die Schrittweite 0.25 zu lösenden Gleichungssystems $(\tilde{s}_4)$ regulär?

Stellen Sie für (RWP) das bei der Methode der angepaßten einseitigen Differenzen für die Schrittweite 0.25 zu lösende lineare Gleichungssystem $\hat{A}y = \hat{r}$ auf.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Für

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ |x| + |y| > 1 \text{ und } \max\{|x|,|y|\} < 3\}$$

und

$$\varphi : \partial\Omega \ni (x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } |x| + |y| = 1 \\ 1 & \text{falls } \max\{|x|,|y|\} = 3 \end{cases}$$

sei $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ die Lösung des zugehörigen Dirichlet-Problems.

Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für die mit der Differenzenmethode (für $h = 1$) zu berechnenden Approximationen $y_{i,j}$ von $u(i,j)$, $(i,j) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cap \Omega$ auf.

Lösungen ohne erkennbaren Lösungsweg werden nicht akzeptiert!

Viel Erfolg!!!