BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

Es seien $\lambda, \mu \in]0, \infty[$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Für $y_0 \in]0, \frac{\lambda}{\mu}[$ ist

$$\varphi : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \left(\left(\frac{1}{y_0} - \frac{\mu}{\lambda} \right) e^{-\lambda\,(x - x_0)} + \frac{\mu}{\lambda} \right)^{-1}$$

die eindeutig bestimmte auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung des Anfangswertproblems (für die Differentialgleichung des *logistischen Wachstums*)

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} y' = (\lambda - \mu y)\, y \ , & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ , \\ y(x_0) = y_0 \ . \end{cases}$$

b) φ ist streng monoton wachsend,

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \frac{\lambda}{\mu} \ .$$

Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte Lösung φ von (A) mit maximalem Definitionsintervall für die Fälle $y_0 > \frac{\lambda}{\mu}$ und $y_0 = \frac{\lambda}{\mu}$.

Wie verhält sich in diesen Fällen $\varphi(x)$, wenn x gegen die Grenzen des Definitionsintervalls von φ strebt?

Zeigen Sie, daß die betrachtete Differentialgleichung für $(x, y) \in \mathbb{R} \times [\frac{\lambda}{2\mu}, \infty[$ dissipativ ist.

Geben Sie die durch Anwendung des impliziten Polygonzugverfahrens auf (A) erzeugte Iteration unter Beachtung der Nebenbedingung $y_k > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$ an.

Aufgabe 2:

Bei Anwendung des Eulerschen Polygonzugverfahrens mit konstanter Schrittweite

$$\Delta x \quad (= x_{k+1} - x_k \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}_0)$$

auf das in Aufgabe 1 betrachtete Anfangswertproblem (A) erhält man die Iteration

$$y_{k+1} = y_k + \Delta x\, (\lambda - \mu y_k)\, y_k \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Untersuchen Sie, ob für $\Delta x < \frac{1}{\max\{\lambda, \mu y_0\}}$ das Verhalten der Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ für $k \to \infty$ dem Verhalten der Lösung φ von (A) für $x \to \infty$ entspricht.

(Konvergiert $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ im Fall $0 < y_0 < \frac{\lambda}{\mu}$ ($y_0 > \frac{\lambda}{\mu}$) streng monoton wachsend (fallend) gegen $\frac{\lambda}{\mu}$? Gilt $y_k = \frac{\lambda}{\mu} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$, falls $y_0 = \frac{\lambda}{\mu}$?)

Stellen Sie für $\lambda = 6$, $\mu = 8$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.1$ und möglichst großes N die Folgen $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{N}$ zu den Anfangswerten $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 1$ graphisch dar.

Aufgabe 3:

Das „Räuber-Beute-Anfangswertproblem“ hat die Form

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} y_1' = (g - m y_1 - u y_2)\, y_1 \ , \\ y_2' = (-h + v y_1 - q y_2)\, y_2 \ , \\ y_1(x_0) = y_{01} \ , \ y_2(x_0) = y_{02} \ . \end{cases} \qquad (x, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,$$

Dabei sind g, m, u, h, v, q positive Konstanten, $y_{01}, y_{02} \in [0, \infty[$.

Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (A) und $x \in I$, so beschreibt $\varphi_1(x)$ den „Beutebestand zur Zeit x“, $\varphi_2(x)$ den „Räuberbestand zur Zeit x“.

Zeigen Sie, daß das auf (A) angewandte Eulersche Polygonzugverfahren mit konstanter Schrittweite Δx zu einer Folge $\left\{ y^{(k)} = \left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)} \right)^\top \right\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ führt, für die mit

$$F_{\Delta x} : \mathbb{R}^2 \ni y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (1 + \Delta x\, (g - m y_1 - u y_2))\, y_1 \\ (1 + \Delta x\, (-h + v y_1 - q y_2))\, y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gilt:

$$y^{(k+1)} = F_{\Delta x}\left(y^{(k)} \right) \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zeigen Sie:

a) Konvergiert $\{y^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, so ist $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(k)} =: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ Fixpunkt von $F_{\Delta x}$ und folglich

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h/q \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g/m \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{cases} m y_1 + u y_2 = g \\ v y_1 - q y_2 = h \end{cases} \ .$$

b) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ist genau dann Fixpunkt von $F_{\Delta x}$, wenn für $\begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(eine sogenannte Gleichgewichts-)Lösung von (A) ist.

c) Ist $mq + vu \neq 0$, so hat $F_{\Delta x}$ genau vier Fixpunkte.

Bestimmen Sie unter der Voraussetzung $mq + vu \neq 0$ in jedem der vier Fixpunkte von $F_{\Delta x}$ die Funktionalmatrix von $F_{\Delta x}$ und deren Spektralradius. Welche der Fixpunkte sind für hinreichend kleine Δx anziehende Fixpunkte von $F_{\Delta x}$?

Bemerkung: Ist y^* ein anziehender Fixpunkt von $F_{\Delta x}$, so konvergiert die durch das Eulersche Polygonzugverfahren definierte Iterationsfolge für jedes hinreichend nahe bei y^* gelegene $(y_{01}, y_{02})^\top \in \mathbb{R}^2$ gegen y^*. Damit stellt sich natürlich die Frage, ob für jedes dieser $(y_{01}, y_{02})^\top$ für die zugehörige eindeutig bestimmte Lösung φ von (A) mit maximalem Definitionsintervall I gilt: $[x_0, \infty[\subset I$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = y^*$.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \cos(x + y) \ , \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ , \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

genau eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Bestimmen Sie die Koeffizienten $\frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!}$, $\nu = 0, 1, 2, 3$, des Taylorpolynoms dritten Grades von φ in 0.

Frohe Weihnachten und viel Glück und Erfolg im ersten Jahr des neuen Jahrtausends!

Abgabetermin: Mittwoch, 10. Januar **2001**, in der Vorlesung