BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei konvex, d. h. es gilt:

$$f(x+\lambda y) \le f(x) + \lambda(f(x+y) - f(x)) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \text{ und } \lambda \in [0,1]\,.$$

Zeigen Sie:

a) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu, \tau \in]0, \infty[$ mit $\mu > \lambda$ gilt:

$$\frac{f(x+\mu y) - f(x)}{\mu} \ge \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda} \ge \frac{f(x) - f(x-\tau y)}{\tau}\,.$$

Folgern Sie daraus, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung

$$\partial f(x,y) := \lim_{0<\lambda\to 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

existiert.

b) $f(\mathbb{R}^n)$ ist ein (eventuell einpunktiges) Intervall, und für jede auf einem Intervall $I \supset f(\mathbb{R}^n)$ definierte monoton wachsende konvexe Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist $\varphi \circ f$ konvex.

Aufgabe 2:

$\|\cdot\|$ sei eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $\|\cdot\|$ und die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto \frac{1}{2}\|x\|^2 \in \mathbb{R}$$

sind konvex.

b) Es gilt:

$$\partial\Phi(x,y) = \|x\|\, \partial\|\cdot\|(x,y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Anleitung:

$$\frac{\Phi(x+\lambda x) - \Phi(x)}{\lambda} = \left(\frac{\|x+\lambda y\| + \|x\|}{2}\right)\left(\frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}\right) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Aufgabe 3:

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k$, seien konvex. Zeigen Sie:

a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto \max_{i=1}^{k} f_i(x)$$

ist konvex.

b) Mit $I(x) := \{i \in \{1, \ldots, k\} :\ f_i(x) = f(x)\}\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\partial f(x,y) = \max_{i \in I(x)} \partial f_i(x,y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

c) Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\partial\|\cdot\|_\infty(x,y) = \begin{cases} \|y\|_\infty & \text{falls } x = 0 \in \mathbb{R}^n, \\ \max\limits_{i:\,|x_i| = \|x\|_\infty} y_i \operatorname{sign}(x_i) & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\,. \end{cases}$$

Aufgabe 4:

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) Für $\mu[A]$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ gilt:

1. $\mu[A] = \frac{1}{2} \max\limits_{\|y\|_2=1} y^\top (A + A^\top) y$,

2. $\mu[A]$ stimmt mit dem größten Eigenwert des symmetrischen Anteils $\frac{1}{2}(A + A^\top)$ von A überein.

Anleitung: Zeigen Sie:

(i) Für alle y mit $\|y\|_2 = 1$ und alle $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\|I + \lambda A\| - 1}{\lambda} &\geq \frac{\|y + \lambda A y\|_2 - 1}{\lambda} \\ &= \frac{y^\top (A + A^\top) y + \lambda y^\top A^\top A y}{\|y + \lambda A y\|_2 + 1} \underset{(\lambda\to 0)}{\to} \frac{1}{2}\, y^\top \Big(A + A^\top\Big) y\end{aligned}$$

(ii) Zu jedem $\lambda > 0$ gibt es ein y_λ mit $\|y_\lambda\| = 1$ und

$$\frac{\|I + \lambda A\| - 1}{\lambda} = \frac{y_\lambda^\top (A + A^\top) y_\lambda + \lambda y_\lambda^\top A^\top A y_\lambda}{\|y_\lambda + \lambda A y_\lambda\|_2 + 1} .$$

Wählt man $\lambda_\nu > 0,\ \nu \in \mathbb{N}$, so daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} \lambda_\nu = 0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} y_{\lambda_\nu} =: y$ existiert, so ist

$$\lim_{0<\lambda\to 0} \frac{\|I + \lambda A\| - 1}{\lambda} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\|I + \lambda_\nu A\| - 1}{\lambda_\nu} = \frac{1}{2}\, y^\top \Big(A + A^\top\Big) y .$$

b) Für $\mu[A]$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gilt:

$$\mu[A] = \max_{i=1}^{n} \Big(a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \Big) .$$

Aufgabe 5:

f, φ und ψ seien die in Aufgabe 4 / Blatt 6 betrachteten Funktionen.

Schätzen Sie $\|\varphi - \psi\|_\infty$ mit Hilfe von Satz I.16' ab, und vergleichen Sie das Resultat mit der aus Satz I.16 gewonnenen Abschätzung.

Schätzen Sie $\|\varphi - \psi\|_2$ mit Hilfe von Satz I.16 und mit Hilfe von Satz I.16' ab, und vergleichen Sie die Resultate.

Hinweis: Zur Bestimmung der im Satz I.16' auftretenden Funktion ν kann man verwenden, was in Aufgabe 4 gezeigt werden soll.

Abgabetermin: Mittwoch, 20. Dezember 2000, in der Vorlesung