BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

D sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$f : D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^n$$

stetig nach y differenzierbar (d. h.

$$D \ni (x, y) \longmapsto D_2 f(x, y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

existiert und ist stetig).

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 auf Blatt 3, daß f lokal einer Lipschitzbedingung genügt.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß $]-\infty, 1[$ das Definitionsintervall der nicht fortsetzbaren Lösung φ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = y^2 \,, & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ist.

Wie verhält sich $\varphi(x)$ für $x \to 1$?

Anleitung: Zeigen Sie, daß für die Funktion $\psi : \mathbb{R} \backslash \{1\} \ni x \longmapsto \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}$ gilt: $\psi' = \psi^2$.

Aufgabe 3:

$\|\cdot\|$ bezeichne eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und gleichzeitig eine Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$, für die gilt:

$$\|A\, y\| \le \|A\|\, \|y\| \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \;\text{ und }\; y \in \mathbb{R}^n \,.$$

Es sei $\mathbb{R} \ni x \longmapsto A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und zu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ bezeichne $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = A(x)\, y \,, & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ y(x_0) = y_0 \,. \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas die Abschätzung

$$\|\varphi(x)\| \le \|y_0\| \, \exp\Big(\Big| \int\limits_{x_0}^{x} \|A(\xi)\| \, d\xi \, \Big| \Big) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \,.$$

Bemerkung: Für $A(x) = B \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ entspricht dies der Abschätzung

$$\|\varphi(x)\| \le \|y_0\| \, \exp\left(|x - x_0| \, \|B\| \right) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \,.$$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, daß mit

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 11 & 10 \end{pmatrix} y$$

die Abbildung

$$\varphi : [0,1] \ni x \longmapsto e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y)\,, & (x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2 \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ist.

Schätzen Sie mit Hilfe von Satz I.16 $\|\varphi - \psi\|_\infty$ ab, wobei $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y)\,, & (x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2 \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.988 \end{pmatrix} \end{cases}$$

bezeichnet.

Bestimmen Sie ψ und den genauen Wert von $\|\varphi - \psi\|_\infty$.

Hinweis: ψ ist Linearkombination zweier Lösungen von $y' = f(x,y)$ vom Typ $e^{\lambda x} \cdot c$.

Aufgabe 5:

Mit einer Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, $h : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : [a,b] \to [0,\infty[$ sei

$$M_x := \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, \|y - h(x)\| \le \psi(x)\} \quad \forall\, x \in [a,b]\,,$$
$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,:\, x \in [a,b] \text{ und } y \in M_x\}$$

und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Ferner gelte mit einer stetigen Funktion $\nu : [a,b] \to \mathbb{R}$ (die *einseitige Lipschitzbedingung*) :

$$(f(x,y_1) - f(x,y_2))^\top (y_1 - y_2) \le \nu(x)\, \|y_1 - y_2\|_2^2 \quad \forall\, x \in [a,b]\,,\ y_1, y_2 \in M_x\,.$$

Zeigen Sie:

a) Für stetig differenzierbare Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_i(x) \in M_x \quad \forall\, x \in [a,b],\ i = 1,2,$ gilt für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 \le x_2$:

$$\|\varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_2)\|_2 \le e^{\int_{x_1}^{x_2} \nu(\xi)d\xi} \|\varphi_2(x_1) - \varphi_1(x_1)\|_2 + \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(\xi)\, e^{\int_{\xi}^{x_2} \nu(\eta)d\eta} d\xi$$

mit

$$\varepsilon(x) := \left\|\varphi_2'(x) - f(x,\varphi_2(x)) - \left(\varphi_1'(x) - f(x,\varphi_1(x))\right)\right\|_2 \quad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

b) Zu jedem $y_0 \in M_a$ gibt es höchstens ein $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) & \forall\, x \in [a,b]\,, \\ \varphi(a) = y_0\,. \end{cases}$$

Abgabetermin: Mittwoch, 13. Dezember 2000, in der Vorlesung