BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

Stellen sie fest, ob folgende Verallgemeinerung der in Aufgabe 3 / Blatt 4 nachzuweisenden Aussage gilt:

$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und in jedem $x \in \mathring{I}\ (\neq \emptyset)$ differenzierbar.
Ferner gelte für eine abgeschlossene konvexe Menge $C \subset \mathbb{R}^n$: $\varphi'(\mathring{I}) \subset C$.

Dann gibt es für alle $t_1, t_2 \in I$ ein $c \in C$ mit

$$\varphi(t_2) = \varphi(t_1) + (t_2 - t_1)\, c\ .$$

Aufgabe 2:

$\|\cdot\|$ sei eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und eine Zerlegung $a = x_0 < \cdots < x_N = b$ von $[a,b]$ sei $\varphi|[x_i, x_{i+1}]$ bezüglich $\|\cdot\|$ Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten $L_i \in [0, \infty[\ ,\ i = 0, \ldots, N-1$.

Zeigen Sie durch Induktion nach N, daß φ bezüglich $\|\cdot\|$ Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten $\max\limits_{i=0}^{N-1} L_i$ ist.

Aufgabe 3:

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer Lipschitzbedingung

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \le L\, \|y_1 - y_2\| \quad \forall\, (x,y_1), (x,y_2) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n\ .$$

($\|\cdot\|$ bezeichne eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $L \in [0, \infty[$.)

Zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es dann (nach Satz I.8) genau eine Lösung $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y)\ , & (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n\ , \\ y(a) = y_0\ . \end{cases}$$

Zu einer Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ von $[a,b]$ und einer Näherung $\psi_0 \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ von φ werde folgende approximative Picard-Iteration betrachtet:

Liegt $\psi_\nu \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ vor, so approximiert man

$$h_\nu : [a,b] \ni x \longmapsto f(x, \psi_\nu(x)) \in \mathbb{R}^n$$

durch $\tilde{h}_\nu : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\tilde{h}_\nu(x) := h_\nu(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(h_\nu(x_{i+1}) - h_\nu(x_i)) \quad \forall\, x \in [x_i, x_{i+1}]\ ,\ i = 0, \ldots, N-1$$

und setzt

$$\psi_{\nu+1} : [a,b] \ni x \longmapsto y_0 + \int_a^x \tilde{h}_\nu(\xi)\, d\xi\ .$$

Berechnen Sie ψ_{10} für $[a,b] = [0,1]$,

$$f(x,y) := y + x\,(x-2) \quad \forall\,(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}\ ,$$

$y_0 := 1$, $N = 32$ und

$$\psi_0(x) := 1 + x - \frac{x^2}{2} \quad \forall\, x \in [0,1]\ .$$

Vergleichen Sie ψ_{10} mit der eindeutig bestimmten Lösung

$$\varphi : [0,1] \ni x \longmapsto e^x - x^2$$

des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x,y)\ , & (x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}\ , \\ y(0) = y_0\ . \end{cases}$$

Bemerkung: $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(x) = e^x - 2x = \underbrace{e^x - x^2}_{\varphi(x)} + \underbrace{x^2 - 2x}_{x(x-2)}$.

Aufgabe 4:

Für $\xi_0, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}$ mögen mit Konstanten $A, B \in [0, \infty[$ die folgenden impliziten Abschätzungen gelten:

$$|\xi_i| \le A\,|\xi_{i-1}| + B\ ,\ i = 1, \ldots, N.$$

Leiten Sie daraus die expliziten Abschätzungen

$$|\xi_i| \le A^i\,|\xi_0| + \begin{cases} \frac{A^i - 1}{A-1}\,B & \text{falls } A \ne 1 \\ i\,B & \text{falls } A = 1 \end{cases}\ ,\ i = 1, \ldots, N$$

her.

Aufgabe 5:

$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar, $b := \sup(I) \in \mathbb{R} \backslash I$ (also $I = \cdots, b[$). Ferner existiere $\lim\limits_{I \ni \xi \to b} \varphi'(\xi)$.

Zeigen Sie: Es existiert $\lim\limits_{I \ni \xi \to b} \varphi(\xi)$ und für

$$\tilde{\varphi} : I \cup \{b\} \ni x \longmapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{falls } x \in I \\ \lim\limits_{I \ni \xi \to b} \varphi(\xi) & \text{falls } x = b \end{cases}$$

gilt: $\tilde{\varphi}$ ist differenzierbar mit

$$\tilde{\varphi}'(x) = \varphi'(x) \quad \forall\, x \in I \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}'(b) = \lim_{I \ni \xi \to b} \varphi'(\xi)\ .$$

Abgabetermin: Mittwoch, 6. Dezember 2000, in der Vorlesung