BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

$\Phi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei stetig, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zu jedem $[a,b] \subset I$ gebe es ein $L_{[a,b]} \geq 0$ mit

$$\left|\Phi\big(x,y^1\big) - \Phi\big(x,y^2\big)\right| \leq L_{[a,b]} \left\|y^1 - y^2\right\| \quad \forall\, x \in [a,b] \text{ und } y^1, y^2 \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, daß es zu jedem $\big(x_0, y^0\big) \in I \times \mathbb{R}^n$ genau eine n-mal (stetig) differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ gibt, mit

$$u^{(n)}(x) = \Phi\Big(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x)\Big) \quad \forall\, x \in I \quad \text{und}$$
$$u^{(j)}(x_0) = y^0_{j+1}\ ,\ j = 0, \ldots, n-1\ .$$

Anleitung: Stellen Sie einen Zusammenhang mit folgendem Problem her:

- Gegeben:

$$f : I \times \mathbb{R}^n \ni \Big(x, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\Big) \longmapsto \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \Phi(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \big(x_0, y^0\big) \in I \times \mathbb{R}^n\ .$$

- Gesucht:

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \ \forall\, x \in I \text{ und } \varphi(x_0) = y^0\ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz I.8, daß dieses Problem genau eine Lösung besitzt!

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß es zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedem $(t_0, \varphi_0, \varphi_0') \in \mathbb{R}^3$ genau eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, für die gilt:

$$\varphi''(t) = -\alpha\, \varphi'(t) - \sin\left(\varphi(t)\right) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \text{und}$$
$$\varphi(t_0) = \varphi_0\ ,\ \varphi'(t_0) = \varphi_0'\ .$$

Bemerkung: Für $\alpha > 0$ beschreibt φ die (eindimensionale) Bewegung eines gedämpften Schwingers unter Einwirkung einer nichtlinearen äußeren Kraft.

Aufgabe 3:

$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar und für eine abgeschlossene konvexe Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ gelte $\varphi'(I) \subset C$.

Zeigen Sie, daß es für alle $t_1, t_2 \in I$ ein $c \in C$ gibt mit

$$\varphi(t_2) = \varphi(t_1) + (t_2 - t_1)\, c\ .$$

Anleitung: Angenommen, es gibt $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$ und

$$x := \frac{1}{t_2 - t_1}(\varphi(t_2) - \varphi(t_1)) \notin C\ .$$

Dann gibt es (nach Lemma I.9) ein $\bar{x} \in C$ mit

$$(\bar{x} - x)^\top (y - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall\, y \in C\ .$$

Zeigen Sie, daß für die Funktion

$$\mu : [t_1, t_2] \ni t \longmapsto (\bar{x} - x)^\top (\varphi(t) - t\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

$\mu(t_1) \leq \mu(t_2)$ gilt, was aber im Widerspruch zu $x \neq \bar{x}$ steht!

Aufgabe 4:

Mit einer Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ und $M, L \in [0, \infty[$ mögen für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folgende Abschätzungen gelten:

(I) $\|f(y)\| \leq M \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n$,

(II) $\left\|f(y^1) - f(y^2)\right\| \leq L \left\|y^1 - y^2\right\| \quad \forall\, y^1, y^2 \in \mathbb{R}^n$.

Dann gibt es (nach Satz I.8) zu vorgegebenem $\left(t_0, y^0\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ genau eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \varphi(t_0) = y^0\ .$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt:

$$\left\|\varphi(t) - \left(\varphi(t') + (t - t')\, f(\varphi(t'))\right)\right\| \leq \frac{1}{2}\, LM\, (t - t')^2 \quad \forall\, t, t' \in \mathbb{R}\ .$$

b) Gilt für ein $t_k \in \mathbb{R}$ und ein $y^k \in \mathbb{R}^n$

$$\left\|y^k - \varphi(t_k)\right\| \leq \delta_k$$

und bestimmt man zu $t_{k+1} > t_k$ ein $y^{k+1} \in \mathbb{R}^n$ als Näherung von

$$y^k + (t_{k+1} - t_k)\, f\left(y^k\right)\ ,$$

so folgt aus

$$\left\|y^{k+1} - \left(y^k + (t_{k+1} - t_k)\, f\left(y^k\right)\right)\right\| \leq \varepsilon_{k+1}$$

die Abschätzung

$$\left\|y^{k+1} - \varphi(t_{k+1})\right\| \leq \delta_{k+1}$$

für jede obere Schranke δ_{k+1} von

$$\varepsilon_{k+1} + (1 + L\,(t_{k+1} - t_k))\, \delta_k + \frac{1}{2}\, LM\, (t_{k+1} - t_k)^2\ .$$

Teil b) kann zur Einschließung der Lösungen von Anfangswertproblemen des Typs

$$y' = f(y)\ ,\ y(t_0) = y^0$$

verwendet werden. Schreiben Sie für $n = 1$ und $\|\cdot\| := |\cdot|$ einen entsprechenden Algorithmus (z. B. in Pascal-XSC) und testen Sie ihn mit

$$f(y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y \leq 1 \\ y & \text{falls } 1 < y < 2 \\ 2 & \text{falls } y \geq 2 \end{cases}\ ,\ \left(t_0, y^0\right) := (0, 1)\ ,\ t_k := k \cdot 0.05\ ,\ k = 1, \ldots, 10\ .$$

(Als Ergebnis sollte man Einschließungen der Zahlen $\varphi(t_k) = \exp(t_k)\ ,\ k = 0, \ldots, 10$, erhalten.)

Abgabetermin: Mittwoch, 29. November 2000, in der Vorlesung