BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau eine Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(i) $\partial_2 u(x,t) + c\,\partial_1 u(x,t) = 0 \quad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(ii) $u(x,0) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $u(x,t) = f(x - ct) \quad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

c) Für $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sind mit $h := \frac{a}{n}$, $k := \frac{t}{n}$ durch

(i')
$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + c\,\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} = 0\ ,\ j = 0,\ldots,n-1,\ i = 0,\ldots,n-j-1,$$

(ii')
$$u_{i,0} = f(x + ih)\ ,\ i = 0,\ldots,n,$$

eindeutige Approximationen $u_{i,j}$ für $u(x + ih, jk)$, $j = 0,\ldots,n,\ i = 0,\ldots,n-j$, bestimmt.

Berechnen Sie für $f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \cos(10x)$, $c = 3$, $x = t = 0.5$, $n = 30$, $a = -3,\ -2,\ -1.5,\ -1,\ 1,\ 2$, jeweils $u_{0,n}$ als Approximation von $u(x,t)$ $(= \cos(10(x - ct)))$.

Versuchen Sie zu erklären, warum $u_{0,n}$ für $a = -1.5$ eine sehr genaue Approximation von $u(x,t)$ ist, für $a = -1,\ 1,\ 2$ aber eine sehr schlechte.

Aufgabe 2:

Zu $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, 1 < |x| + |y| < 3\}$ sei $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Funktion mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
&\partial_{11}^2 u(x,y) + \partial_{22}^2 u(x,y) = 0 \quad \forall\,(x,y) \in \Omega\ ,\\
&u(x,y) = 1 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ mit } |x| + |y| = 1\ ,\\
&u(x,y) = 0 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ mit } |x| + |y| = 3\ .
\end{aligned}$$

Approximieren Sie $u|_{((\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\cap\Omega)}$.

Aufgabe 3:

Zu $a \in]0,\infty[$, $f \in C([0,a],\mathbb{R})$ und beschränkten Funktionen $g_1, g_2 \in C([0,\infty[,\mathbb{R})$ mit $g_1(0) = f(0)$, $g_2(0) = f(a)$ sei $u : [0,a] \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Funktion mit den Eigenschaften

(o) $\partial_2 u(x,t) = \partial_{1,1}^2 u(x,t) \quad \forall\,(x,t) \in]0,a[\times]0,\infty[$,
(i) $u(x,0) = f(x) \quad \forall\, x \in [0,a]$,
(ii) $u(0,t) = g_1(t)\ ,\ u(a,t) = g_2(t) \quad \forall\, t \in [0,\infty[$,
(iii) u ist stetig.

Zeigen Sie, daß für $T > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $h := \frac{a}{n}$, $k := \frac{T}{m}$, durch

(o')
$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = 0 \ , \ j = 0, \ldots, m-1, \ i = 1, \ldots, n-1,$$

(i')
$$u_{i,0} = f(ih) \ , \ i = 0, \ldots, n,$$

(ii')
$$u_{0,j} = g_1(jk) \ , \ u_{n,j} = g_2(jk) \ , \ j = 1, \ldots, m,$$

eindeutig bestimmte Approximationen $u_{i,j}$ für $u(ih, jk)$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$, gegeben sind.

Bestimmen Sie die $u_{i,j}$ für $a := 3$, $f(x) := x^2 \ \forall\, x \in [0, a]$, $g_1(t) := 0$, $g_2(t) := 9 \ \forall\, t \in [0, \infty[$, $T := 3$, $n := 3$, $m := 6$.

Aufgabe 4:

Zu $a \in]0, \infty[$, $f_1 \in C([0, a], \mathbb{R})$ und beschränkten Funktionen $g_1, g_2 \in C([0, \infty[, \mathbb{R})$, $f_2 \in C(]0, a[, \mathbb{R})$ mit $g_1(0) = f_1(0)$, $g_2(0) = f_1(a)$ sei $u : [0, a] \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Funktion mit den Eigenschaften

(o) $\partial^2_{1,1} u(x, y) - \partial^2_{2,2} u(x, y) = 0 \quad \forall\, (x, y) \in]0, a[\times]0, \infty[$,

(i_a) $u(x, 0) = f_1(x) \quad \forall\, x \in [0, a]$,

(i_b) $\partial_2 u(x, 0) = f_2(x) \quad \forall\, x \in]0, a[$,

(ii) $u(0, y) = g_1(y)$, $u(a, y) = g_2(y) \quad \forall\, y \in [0, \infty[$,

(iii) u ist stetig.

Zeigen Sie, daß für $b > 0$, $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $h := \frac{a}{n}$, $k := \frac{b}{m}$, durch

(o')
$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} = 0 \ , \ i = 1, \ldots, n-1, \ j = 1, \ldots, m-1,$$

(i_a')
$$u_{i,0} = f_1(ih) \ , \ i = 0, \ldots, n,$$
$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{k} - \frac{k}{2} \frac{u_{i-1,0} - 2u_{i,0} + u_{i+1,0}}{h^2} = f_2(ih) \ , \ i = 1, \ldots, n-1,$$

(ii')
$$u_{0,j} = g_1(jk) \ , \ u_{n,j} = g_2(jk) \ , \ j = 1, \ldots, m,$$

eindeutig bestimmte Approximationen $u_{i,j}$ für $u(ih, jk)$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$, gegeben sind.

Bestimmen Sie die $u_{i,j}$ für $a := 1$, $f_1(x) := x \ \forall\, x \in [0, a]$, $g_1(y) := 0$, $g_2(y) := 1 \ \forall\, y \in [0, \infty[$, $f_2(x) := 1 \ \forall\, x \in]0, a[$, $b := 1.5$, $m := 6$, $n := 3$.

Aufgabe 5:

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das Dirichlet-Problem gibt es zu $\Omega :=]0, 1[\times]0, 1[$ genau eine Funktion $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(o) $u|_\Omega$ ist zweimal stetig differenzierbar ,

(i) $\partial^2_{11} u(x, y) + \partial^2_{22} u(x, y) = 0 \quad \forall\, (x, y) \in \Omega$,

(ii) $u(x, y) = x^2 \quad \forall\, (x, y) \in \partial\Omega$,

(iii) u ist stetig.

Zeigen Sie:

a) (i) wird falsch, wenn man Ω durch $\bar{\Omega}$ ersetzt.

b) u ist nicht zweimal stetig differenzierbar.