BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1:

Unter den in der Vorlesung für $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ angenommenen Voraussetzungen sei $\varphi : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(t, y) \ , \ y(t_0) = y_0 \ .$$

Zu $N \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\Delta t := \frac{T-t_0}{N}$, $t_k := t_{k-1} + \Delta t$, $k = 1, \ldots, N$, sei z_0 eine Näherung für $\varphi(t_0) = y_0$, z_1 eine Näherung für $\varphi(t_1)$ (z. B. $z_1 \approx z_0 + \Delta t f(t_0, z_0)$). Liegen für ein $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ eine Näherung z_{k-1} für $\varphi(t_{k-1})$ und eine Näherung z_k für $\varphi(t_k)$ vor, so werde als Näherung z_{k+1} für $\varphi(t_{k+1})$ eine Näherung von $z_{k-1} + 2\Delta t f(t_k, z_k)$ bestimmt (*Leapfrog*).

Zeigen Sie, daß mit

$$\begin{aligned} &\alpha_k := z_k - \varphi(t_k) \ , \ k = 0, \ldots, N, \text{ und} \\ &\varepsilon_{k+1} := z_{k-1} + 2\Delta t f(t_k, z_k) - z_{k+1} \ , \ k = 1, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

gilt:

a) Für $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ ist

$$\begin{aligned} \|\alpha_{k+1}\| &\le \left\| -\left[\varepsilon_{k+1} + 2\Delta t \left(\frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_{k-1})}{2\Delta t} - \varphi'(t_k) \right) \right] \right\| \\ &\quad + \|\alpha_{k-1}\| + 2\Delta t \|f(t_k, z_k) - f(t_k, \varphi(t_k))\| \\ &\le \|\varepsilon_{k+1}\| + 2\Delta t \left\| \frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_{k-1})}{2\Delta t} - \varphi'(t_k) \right\| + \|\alpha_{k-1}\| + 2\Delta t L \, \|\alpha_k\| \ . \end{aligned}$$

b) Falls f stetig differenzierbar ist und wenn

$$\|\partial_1 f(t, y) + \partial_2 f(t, y) f(t, y)\| \le K \quad \forall \, (t, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$$

gilt, so ist

$$\|\alpha_{k+1}\| \le \|\varepsilon_{k+1}\| + \|\alpha_{k-1}\| + \Delta t \, (\Delta t K + 2L \|\alpha_k\|) \ , \ k = 1, \ldots, N-1.$$

Hinweis: Verifizieren Sie dazu

$$\frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_{k-1})}{2\Delta t} - \varphi'(t_k) = \frac{1}{2\Delta t} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - \tau) \varphi''(\tau) d\tau + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau) \varphi''(\tau) d\tau \right)$$

und

$$\left\| \frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_{k-1})}{2\Delta t} - \varphi'(t_k) \right\| \le \frac{\Delta t}{2} \max_{\tau \in [t_{k-1}, t_{k+1}]} \left\| \varphi''(\tau) \right\| \le \frac{\Delta t}{2} \, K \ .$$

c) Falls f nicht von t abhängt (d.h. $f(t, y) = \tilde{f}(y) \ \ \forall \, (t, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$), so ist

$$\|\alpha_{k+1}\| \le \|\varepsilon_{k+1}\| + \|\alpha_{k-1}\| + L\Delta t \, (M \Delta t + 2\|\alpha_k\|) \ , \ k = 1, \ldots, N-1.$$

Hinweis: Benutzen Sie dazu die Identitäten

$$\frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_{k-1})}{2\Delta t} - \varphi'(t_k) = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \left(\varphi'(\tau) - \varphi'(t_k) \right) d\tau = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \left(\tilde{f}(\varphi(\tau)) - \tilde{f}(\varphi(t_k)) \right) d\tau$$

Aufgabe 2:

Für welche der nachfolgend angegebenen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist die (Null-)Lösung

$$\varphi_0 : [0,\infty[\ni t \longmapsto 0 \in \mathbb{R}^2$$

des Anfangswertproblems

$$y' = Ay \ , \ y(0) = 0$$

stabil bzw. asymptotisch stabil?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3:

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, daß es eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, für die $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n := U^H A U$ obere Dreiecksgestalt hat (*Satz von Schur*).

Zeigen Sie:

a) Für den Spektralradius $\varrho(A)$ von A gilt:

$$\varrho(A) = \max_{i=1}^{n} |t_{ii}| \ .$$

b) Wählt man im Fall $n \geq 2$ zu $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ so klein, daß

$$\sum_{j=1}^{n-i} |t_{i,i+j}| \, \eta^j \leq \varepsilon \quad \forall \, i \in \{1,\ldots,n-1\} \ ,$$

so gilt mit der Diagonalmatrix $D := \operatorname{diag}\big(1,\eta,\eta^2,\ldots,\eta^{n-1}\big)$:

$$\mathbb{C}^{n\times n} \ni B \longmapsto \|B\| := \|D^{-1}U^H B U D\|_\infty$$

ist eine Matrixnorm mit

$$\|A\| \leq \varrho(A) + \varepsilon \ .$$

Aufgabe 4:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei stabil (d.h. $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für jeden Eigenwert λ von A).

Wendet man die Trapezregel mit konstanter Schrittweite $\Delta t > 0$ auf das Anfangswertproblem

$$y' = Ay \ , \ y(0) = y_0$$

an, so erhält man die implizite Gleichung

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2}[Ay_n + Ay_{n+1}]$$

zur Berechnung von y_{n+1} aus y_n , $n = 0,1,\ldots$.

Zeigen Sie:

a) $I - \frac{\Delta t}{2}A$ ist invertierbar. (Dabei bezeichne I die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.)

b) Mit $\tilde{A} := \big(I - \frac{\Delta t}{2}A\big)^{-1}\big(I + \frac{\Delta t}{2}A\big)$ ist $y_n = \tilde{A}^n y_0 \quad \forall \, n \in \mathbb{N}$.

c) $\tilde{A} = 2\big(I - \frac{\Delta t}{2}A\big)^{-1} - I$.

d) $\varrho\Big(\tilde{A}\Big) < 1 \ \Leftrightarrow \ \Big|\frac{2}{1-\frac{\Delta t}{2}\lambda} - 1\Big| < 1$ für jeden Eigenwert λ von A.

e) $\Big|\frac{2}{1-\frac{\Delta t}{2}\lambda} - 1\Big| < 1 \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda < 0$ und folglich $\varrho\Big(\tilde{A}\Big) < 1$.

Abgabetermin: Montag, 5. Februar 2001, in der Vorlesung