BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1:

Zeigen Sie:

Ist (bei den in der Vorlesung eingeführten Bezeichnungen und angenommenen Voraussetzungen) f nicht von t abhängig (autonomer Fall), so gilt für das Eulersche Polygonzugverfahren

$$\|T_h(t)\| \leq LM\frac{h}{2}$$

und für die modifizierte Eulermethode

$$\|T_h(t)\| \leq LM\frac{h}{4}\left(1+L\frac{h}{2}\right),$$

jeweils für alle $t \in [t_0, T[$ und $h \in]0, T-t]$.

Aufgabe 2:

I sei ein Intervall, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $t_1, t_2 \in I \ : \ t_1 \neq t_2$, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie:

a) Ist φ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\Delta := \frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1} - \varphi'(t_1) = (t_2-t_1)\int_0^1 (1-\theta)\,\varphi''(t_1+\theta\,(t_2-t_1))\,d\theta$$

und (folglich)

$$\|\Delta\| \leq \frac{1}{2}\,|t_2-t_1| \max_{\theta\in[0,1]} \left\|\varphi''(t_1+\theta\,(t_2-t_1))\right\| .$$

b) Ist φ dreimal stetig differenzierbar, so gilt

(i)

$$\Delta := \frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1} - \frac{\varphi'(t_1)+\varphi'(t_2)}{2} = -\frac{(t_2-t_1)^2}{2}\int_0^1 \theta\,(1-\theta)\,\varphi'''(t_1+\theta\,(t_2-t_1))\,d\theta$$

und (folglich)

$$\|\Delta\| \leq \frac{1}{12}\,(t_2-t_1)^2 \max_{\theta\in[0,1]} \left\|\varphi'''(t_1+\theta\,(t_2-t_1))\right\| .$$

(ii)

$$\Delta := \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} - \varphi'\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) = \frac{(t_2 - t_1)^2}{16} \int\limits_{-1}^{1} \omega(\theta)\, \varphi'''\left(\frac{t_1 + t_2}{2} + \theta\, \frac{t_2 - t_1}{2}\right) d\theta$$

mit

$$\omega(\theta) := \begin{cases} (1+\theta)^2 & \text{falls } \theta \in [-1, 0] \\ (1-\theta)^2 & \text{falls } \theta \in [0, 1] \end{cases}$$

und (folglich)

$$\|\Delta\| \leq \frac{1}{24}\, (t_2 - t_1)^2 \max_{\theta \in [0,1]} \left\|\varphi'''(t_1 + \theta\, (t_2 - t_1))\right\| .$$

(iii)

$$\begin{aligned} \Delta : &= \frac{\varphi(t_2) - \varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}{\frac{t_2-t_1}{2}} - \frac{1}{2}\left(3\, \varphi'\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) - \varphi'(t_1)\right) \\ &= \frac{(t_2 - t_1)^2}{4} \int\limits_{-1}^{1} \kappa(\theta)\, \varphi'''\left(\frac{t_1 + t_2}{2} + \theta\, \frac{t_2 - t_1}{2}\right) d\theta \end{aligned}$$

mit

$$\kappa(\theta) := \begin{cases} \frac{1+\theta}{2} & \text{falls } \theta \in [-1, 0] \\ \frac{1+\theta^2}{2} - \theta & \text{falls } \theta \in [0, 1] \end{cases}$$

und (folglich)

$$\|\Delta\| \leq \frac{5}{48}\, (t_2 - t_1)^2 \max_{\theta \in [0,1]} \left\|\varphi'''(t_1 + \theta\, (t_2 - t_1))\right\| .$$

Aufgabe 3:

Entwickeln Sie einen auf dem modifizierten Eulerverfahren beruhenden Algorithmus zur Einschließung von Lösungen von Anfangswertproblemen für autonome Systeme, und testen Sie ihn mit den in Aufgabe 4 auf Übungsblatt 4 angegebenen Beispieldaten ($T := t_{10} = 0.5$).

Aufgabe 4:

Schätzen Sie den Abschneidefehler für das durch

$$y_{k+1} := y_k + (t_{k+1} - t_k)\, f(t_{k+1}, y_k)$$

gegebene Verfahren ab.

Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren (mindestens), falls f stetig differenzierbar ist?

Abgabetermin: Montag, 29. Januar 2001, in der Vorlesung