BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Wintersemester 2000/01)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

$\|\cdot\|$ sei eine Norm auf dem reellen Vektorraum V. Mit $v_1, \ldots, v_n \in V$ sei

$$\|\cdot\|^{\sim} : \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n)^{\top} \longmapsto \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \Big\| \ .$$

Zeigen Sie:

1) $\|x\|^{\sim} \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
2) $\|\lambda\, x\|^{\sim} = |\lambda|\, \|x\|^{\sim} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$,
3) $\|x + y\|^{\sim} \leq \|x\|^{\sim} + \|y\|^{\sim} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$,
4) $\|x\|^{\sim} \leq \big(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2\big)^{\frac{1}{2}}\, \|x\|_2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,
5) $|\|x\|^{\sim} - \|y\|^{\sim}| \leq \|x - y\|^{\sim} \quad \Big(\leq \big(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2\big)^{\frac{1}{2}}\, \|x - y\|_2\Big) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
   (folglich ist $\|\cdot\|^{\sim}$ stetig!).

Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß $\|\cdot\|^{\sim}$ eine Norm ist.

Aufgabe 2:

$e^1, \ldots, e^n$ seien die Standardeinheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ ($e^i_j = \delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$).

Zeigen Sie: Für jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt mit $c := \big(\sum_{i=1}^{n} \big\|e^i\big\|^2\big)^{\frac{1}{2}}$:

$$\|x\| \leq c\, \|x\|_2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad |\|x\| - \|y\|| \leq c\, \|x - y\|_2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

Insbesondere ist jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

Aufgabe 3:

$V := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ sei der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Zeigen Sie:

a)
$$V \ni f \longmapsto \|f\|_{\infty} := \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{und}$$
$$V \ni f \longmapsto \|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$$
sind Normen auf V.

b) Es gibt kein $c \in \,]0, \infty[$ mit $\|f\|_{\infty} \leq c\, \|f\|_1 \quad \forall\, f \in V$.

Anleitung zu b): Berechnen Sie $\|f_k\|_{\infty}$ und $\|f_k\|_1$ für die (in V liegenden) Funktionen

$$f_k : [0,1] \ni x \longmapsto \max\{1 - kx\ ,\ 0\}\ ,\ k \in \mathbb{N}\ .$$

Aufgabe 4:

V, W seien reelle Vektorräume, $\mathcal{L}(V,W)$ der reelle Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W.

Zeigen Sie: Ist $\|\cdot\|_V$ eine Norm auf V, $\|\cdot\|_W$ eine Norm auf W, so gilt im Fall $0 < \dim V < \infty$:

a)

$$\forall\, L \in \mathcal{L}(V,W)\ \ \exists\, c_L \in [0,\infty[\,:\ \|L(v)\|_W \le c_L\, \|v\|_V \quad \forall\, v \in V$$

und

$$\exists\, \tilde{v} \in V\backslash\{0\}\ :\ \|L(\tilde{v})\|_W = c_L\, \|\tilde{v}\|_V\ .$$

b)

$$c_L = \max_{\|v\|_V \le 1} \|L(v)\|_W = \max_{\|v\|_V = 1} \|L(v)\|_W \quad \forall\, L \in \mathcal{L}(V,W)\ .$$

c) Die Abbildung

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(V,W) \ni L \longmapsto c_L$$

ist eine Norm auf $\mathcal{L}(V,W)$ (die zu $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ gehörige Norm auf $\mathcal{L}(V,W)$).

Bemerkung: Im Fall $W = \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}(V,W)$ der Dualraum V^* von V. Für $\|\cdot\|_W$ wählt man dann stets die Betragsfunktion $|\cdot|$.

Anleitung zu a): Nach Lösung der Aufgaben 1 und 2 läßt sich folgern:

Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so ist

$$\|\cdot\|^{\sim} : \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n)^{\top} \longmapsto \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \Big\|_V$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, und für jedes $L \in \mathcal{L}(V,W)$ ist

$$\|\cdot\|' : \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n)^{\top} \longmapsto \Big\| L\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \Big) \Big\|_W$$

stetig.

Zeigen Sie mit Hilfe des Normäquivalenzsatzes, daß $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^{\sim} = 1\}$ abgeschlossen und beschränkt ist. Es gibt folglich ein $\tilde{x} \in K$ mit $\|\tilde{x}\|' \ge \|x\|' \quad \forall\, x \in K$. Versuchen Sie jetzt a) mit $c_L := \|\tilde{x}\|'$ nachzuweisen.

Abgabetermin: Montag, 6. November 2000, in der Vorlesung