BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

*Fachbereich 7*

**MATHEMATIK**

G. Heindl / P. Feuerstein

**Ausgewählte Kapitel aus der Numerik**
(Sommersemester 1999)

**Übungsblatt 9**

**Definitionen und Bezeichnungen:**

$K$ bezeichne einen $n$–dimensionalen S-Komplex.

a) $(x_0, \ldots, x_k)$ heißt *Kantenzug* (der Länge $k \in \mathbb{N}_0$) in $K$, wenn gilt:

$$\{x_i\} \in K,\ i = 0, \ldots, k, \text{ und}$$
$$\text{im Fall } k \geq 1 :\ x_i \neq x_{i-1} \text{ und } \langle x_{i-1}, x_i \rangle \in K,\ i = 1, \ldots, k.$$

b) Ein Kantenzug $(x_0, \ldots, x_k)$ in $K$ heißt *geschlossen*, wenn $x_0 = x_k$ gilt.

c) Als *elementare Deformation* eines Kantenzuges $(x_0, \ldots, x_k)$ in $K$ in einen anderen Kantenzug in $K$ bezeichnet man jede der folgenden Abbildungen:

- Streichen eines $x_i$ für $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, falls $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ affin unabhängig sind und $\langle x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \rangle \in K$ gilt.
- Einfügen eines $x$ zwischen $x_i$ und $x_{i+1}$ , falls $x_{i-1}, x, x_{i+1}$ affin unabhängig sind und $\langle x_{i-1}, x, x_{i+1} \rangle \in K$ gilt.
- Streichen von $x_i$ und $x_{i+1}$ für $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, falls $x_{i-1} = x_{i+1}$ gilt.
- Einfügen von $x, x_i$ zwischen $x_i$ und $x_{i+1}$ ( $(\ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots) \longmapsto (\ldots, x_i, x, x_i, x_{i+1}, \ldots)$ ) , falls $x, x_i$ affin unabhängig sind und $\langle x_i, x \rangle \in K$ gilt.
- $(x_0, x_1 \ldots, x_k) \longmapsto (x_1, \ldots, x_k, x_1)$ , falls $k \geq 2$ und $(x_0, \ldots, x_k)$ geschlossen ist.

d) $K$ heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle $\{x\}, \{y\} \in K$ einen Kantenzug $(x_0, \ldots, x_k)$ in $K$ mit $x_0 = x$ und $x_k = y$ gibt.

e) $K$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn $K$ zusammenhängend ist und sich jeder geschlossene Kantenzug $(x_0, \ldots, x_k)$ in $K$ (mit $k \geq 2$) durch Anwendung von endlich vielen elementaren Deformationen in einen „Punktweg“ $(y_0)$ überführen läßt.

f) Mit

$$K_0 := \bigcup_{s \in K\,:\,\dim s = n} \overset{\circ}{s}$$

heißt eine Abbildung $f : K_0 \to \mathbb{R}^m$ *stückweise konstant* bezüglich $K$, wenn $f|\overset{\circ}{s}$ für jedes $s \in K$ mit $\dim s = n$ konstant ist.

g) Es sei

$$\mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^m) := \{f : K_0 \to \mathbb{R}^m \ :\ f \text{ stückweise konstant bezüglich } K\} .$$

h) Für $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^m)$ und $s \in K$ mit $\dim s = n$ sei $f_s \in \mathbb{R}^m$ durch $f(\overset{\circ}{s}) = \{f_s\}$ erklärt.

i) Eine Abbildung $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^n)$ heißt *tangentialstetig* bezüglich $K$, wenn gilt:
Ist $\langle x, y \rangle \in K$, so hat $f_s^\top (y - x)$ für jedes $n$–dimensionale $s \in K$, das $\langle x, y \rangle$ als Kante enthält, den gleichen Wert.
Dieser Wert wird im folgenden mit $Jf_{(x,y)}$ bezeichnet.

j) Ist $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^n)$ tangentialstetig bezüglich $K$ und $(x_0, \ldots, x_k)$ ein Kantenzug in $K$, so sei

$$Jf_{(x_0, \ldots, x_k)} := \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} Jf_{(x_{i-1}, x_i)} & \text{falls } k \geq 1 , \\ 0\ (\in \mathbb{R}) & \text{falls } k = 0 . \end{cases}$$

k) $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^n)$ heißt *integrierbar*, wenn es eine Funktion $f \in \mathcal{P}_1(K, \mathbb{R})$ gibt, für die gilt:

$$\operatorname{grad} \varphi(\overset{\circ}{s}) = \{f_s\} \quad \forall\, s \in K \text{ mit } \dim s = n.$$

Jede derartige Funktion $\varphi$ heißt *Stammfunktion* von $f$.

**Aufgabe 1:**

Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^n)$ integrierbar, so gilt:

(i) $f$ ist tangentialstetig bezüglich $K$,
(ii) $Jf_{(x_0,\ldots,x_k)} = 0$ für jeden geschlossenen Kantenzug $(x_0, \ldots, x_k)$ in $K$.

Sind (i) und (ii) auch hinreichend für die Integrierbarkeit von $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^n)$ ?

**Aufgabe 2:**

Zeigen Sie:

a) Ist $K$ zusammenhängend, so gilt: Sind $\varphi_1, \varphi_2$ Stammfunktionen einer integrierbaren Abbildung $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^n)$, so ist $\varphi_2 - \varphi_1$ konstant.

b) Ist $K$ nicht zusammenhängend, so gibt es stets Stammfunktionen $\varphi_1, \varphi_2$ der Nullabbildung $\overline{K} \ni x \longmapsto 0 \in \mathbb{R}^n$ , die sich nicht nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

**Aufgabe 3:**

a) Verifizieren Sie graphisch: Mit

$$x_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4 := \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad x_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad x_6 := \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix},$$
$$x_7 := \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}, x_8 := \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, x_9 := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x_{10} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{11} := \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad x_{12} := \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind

$$s_1 := \langle x_1, x_2, x_9 \rangle, \quad s_2 := \langle x_9, x_2, x_{10} \rangle, \quad s_3 := \langle x_{10}, x_2, x_3 \rangle, \quad s_4 := \langle x_3, x_4, x_{10} \rangle,$$
$$s_5 := \langle x_{10}, x_4, x_{11} \rangle, \quad s_6 := \langle x_{11}, x_4, x_5 \rangle, \quad s_7 := \langle x_5, x_6, x_{11} \rangle, \quad s_8 := \langle x_{11}, x_6, x_{12} \rangle,$$
$$s_9 := \langle x_{12}, x_6, x_7 \rangle, \quad s_{10} := \langle x_7, x_8, x_{12} \rangle, s_{11} := \langle x_{12}, x_8, x_9 \rangle, s_{12} := \langle x_9, x_8, x_1 \rangle$$

die Grundsimplexe eines zusammenhängenden zweidimensionalen S-Komplexes $K$.

b) Mit

$$u_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_6 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$u_7 := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_8 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_9 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_{10} := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_{11} := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_{12} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sei $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^2)$ durch $f_{s_i} := u_i$ , $i = 1, \ldots, 12$, erklärt.
Demonstrieren Sie graphisch, daß $f$ tangentialstetig bezüglich $K$ ist. Ist $f$ integrierbar?

**Aufgabe 4:**

Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^n)$ tangentialstetig bezüglich $K$, $(x_0, \ldots, x_k)$ ein Kantenzug in $K$ und $(x'_0, \ldots, x'_{k'})$ ein aus $(x_0, \ldots, x_k)$ durch eine elementare Deformation hervorgehender Kantenzug in $K$, so gilt:

$$Jf_{(x'_0,\ldots,x'_{k'})} = Jf_{(x_0,\ldots,x_k)} .$$

**Aufgabe 5:**

Zeigen Sie: Ist $K$ einfach zusammenhängend, so ist jede tangentialstetige Abbildung $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^n)$ integrierbar.

**Aufgabe 6:**

$s_i$, $i = 1, \ldots, 12$, seien die in Aufgabe 3 definierten Simplexe, weiter seien mit $0 := \binom{0}{0}$ :

$$s_{13} := \langle 0, x_9, x_{10} \rangle, \quad s_{14} := \langle 0, x_{10}, x_{11} \rangle,$$
$$s_{15} := \langle 0, x_{11}, x_{12} \rangle, s_{16} := \langle 0, x_{12}, x_9 \rangle .$$

Dann sind $s_i$, $i = 1, \ldots, 16$, die Grundsimplexe eines 2–dimensionalen S-Komplexes $\tilde{K}$.

Versuchen Sie die in Aufgabe 3 betrachtete Abbildung $f \in \mathcal{P}_0(K, \mathbb{R}^2)$ zu einer tangentialstetigen Abbildung $\tilde{f} \in \mathcal{P}_0\left(\tilde{K}, \mathbb{R}^2\right)$ zu erweitern.

***Dieses Blatt wird nicht mehr in der Übung besprochen!***