BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Sommersemester 1999)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie: Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\varphi \in C[a,b]$ und $w_a, w_b \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

(i) $u'' = \varphi$,
(ii) $u(a) = w_a,\ u(b) = w_b$,

nämlich

$$u : [a,b] \ni t \longmapsto \frac{t-b}{a-b}\, w_a + \frac{t-a}{b-a}\, w_b + \int_a^b K_t(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau$$

mit

$$K_t(\tau) := -\frac{1}{b-a} \cdot \begin{cases} (b-t)(\tau-a) & \text{falls } a \le \tau \le t \\ (b-\tau)(t-a) & \text{falls } t \le \tau \le b \end{cases} \quad \forall\, t, \tau \in [a,b] \ .$$

b) Beweisen Sie die für alle $\varphi \in C[a,b]$ und $t \in [a,b]$ gültigen Abschätzungen:

$$\left| \int_a^b K_t(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau \right| \le \frac{(b-t)(t-a)}{2}\, \|\varphi\|_\infty \ ,$$

$$\int_a^b K_t(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau \underset{(\le)}{\ge} 0 \text{ falls } \varphi \underset{(\ge)}{\le} 0 \ .$$

c) Bestimmen Sie u für

$$a = 1,\ b = 2,\ \varphi : [a,b] \ni t \longmapsto \frac{1}{t},\ w_a := 0,\ w_b := \ln 4 \ .$$

.

Aufgabe 2:

Zu $t_0, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < \ldots < t_k$ und $w_0, w_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{R}$ seien definiert:

(i)

$$\sigma_1 := 0,\ \alpha_1 := w_0 + \frac{(t_1 - t_0)^2}{2}\, \gamma_1$$

und für $i = 2, \ldots, k$:

$$\sigma_i := \sigma_{i-1} + (t_{i-1} - t_{i-2})\, \gamma_{i-1} \ ,$$
$$\alpha_i := \alpha_{i-1} + (t_i - t_{i-1}) \left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2}\, \gamma_i + \sigma_i \right) \ ,$$

(ii)

$$w_0' := \frac{w_k - \alpha_k}{t_k - t_0} \ ,$$

(iii) für $i = 1, \ldots, k-1$:

$$w_i := \alpha_i + (t_i - t_0)\, w_0' \ ,$$

für $i = 1, \ldots, k$:

$$w_i' := (t_i - t_{i-1})\, \gamma_i + w_{i-1}' \ ,$$
$$s_i(t) := (t - t_{i-1})\left(\frac{t - t_{i-1}}{2}\, \gamma_i + w_{i-1}'\right) + w_{i-1} \quad \forall\, t \in [t_{i-1}, t_i] \ .$$

a) Zeigen Sie:

- Es gibt genau eine Spline-Funktion $s : [t_0, t_k] \to \mathbb{R}$ vom Grad 2 bezüglich $t_0, \ldots, t_k$, für die gilt:
$$s|[t_{i-1}, t_i] = s_i \ , \ i = 1, \ldots, k.$$
- s ist die eindeutig bestimmte Spline-Funktion vom Grad 2 bezüglich $t_0, \ldots, t_k$, für die
$$s(t_0) = w_0, \ s(t_k) = w_k \text{ und}$$
$$s''(t) = \gamma_i \quad \forall\, t \in \,]t_{i-1}, t_i[, \ i = 1, \ldots, k,$$
gilt. (Vergl. Aufgabe 5 auf Blatt 7!)
- Mit
$$K_t(\tau) := -\frac{1}{t_k - t_0} \cdot \begin{cases} (t_k - t)(\tau - t_0) & \text{falls } t_0 \le \tau \le t \\ (t_k - \tau)(t - t_0) & \text{falls } t \le \tau \le t_k \end{cases} \quad \forall\, t, \tau \in [t_0, t_k]$$
gilt:
$$s(t) = \frac{t - t_k}{t_0 - t_k}\, w_0 + \frac{t - t_0}{t_k - t_0}\, w_k + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_t(\tau)\, d\tau \quad \forall\, t \in [t_0, t_k] \ .$$

b) Berechnen Sie zu

$$t_i := 1 + \frac{i}{100} \ , \ i = 0, \ldots, 100,$$
$$w_0 := 0, \ w_{100} := \ln 4,$$
$$\gamma_i := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_{i-1}} + \frac{1}{t_i}\right), \ i = 0, \ldots, 100,$$

die Werte w_i und $(w_i - t_i \ln t_i)$ für $i = 1, \ldots, 99$.
Warum ist zu erwarten, daß s im vorliegenden Fall eine Näherung für die in Aufgabe 1c) gesuchte Funktion u ist?
Schätzen Sie $|s(t) - u(t)|$ für jedes $t \in [1, 2]$ ab. Benutzen Sie dazu eine Abschätzung der Form

$$\left|\gamma_i - \frac{1}{t}\right| \le c \quad \forall\, t \in [t_{i-1}, t_i] \text{ und } i = 1, \ldots, 100.$$

Aufgabe 3:

Zu $t_0, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < \ldots < t_k$ und $w_0, w_k, \gamma_0, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{R}$ seien definiert:

(i)

$$\sigma_1 := 0, \ \alpha_1 := \frac{(t_1 - t_0)^2}{6}\, [\gamma_1 + 2\, \gamma_0]$$

und für $i = 2, \ldots, k$:

$$\sigma_i := \sigma_{i-1} + \frac{\gamma_{i-2} + \gamma_{i-1}}{2}(t_{i-1} - t_{i-2}) \ ,$$
$$\alpha_i := \alpha_{i-1} + (t_i - t_{i-1})\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{6}\, (\gamma_i + 2\, \gamma_{i-1}) + \sigma_i\right) \ ,$$

(ii)

$$w_0' := \frac{w_k - \alpha_k}{t_k - t_0} ,$$

(iii) für $i = 1, \ldots, k-1$:

$$w_i := \alpha_i + (t_i - t_0)\, w_0' ,$$

für $i = 1, \ldots, k$:

$$w_i' := (t_i - t_{i-1})\, \frac{\gamma_{i-1} + \gamma_i}{2} + w_{i-1}' ,$$

$$s_i(t) := (t - t_{i-1})\left((t - t_{i-1})\left(\frac{t - t_{i-1}}{6(t_i - t_{i-1})} (\gamma_i - \gamma_{i-1}) + \frac{\gamma_{i-1}}{2} \right) + w_{i-1}' \right) + w_{i-1}$$
$$\forall\, t \in [t_{i-1}, t_i] .$$

a) Zeigen Sie:

- Es gibt genau eine Spline-Funktion $s : [t_0, t_k] \to \mathbb{R}$ vom Grad 3 bezüglich $t_0, \ldots, t_k$, für die gilt:
$$s|[t_{i-1}, t_i] = s_i\, ,\ i = 1, \ldots, k.$$
- s ist die eindeutig bestimmte Spline-Funktion vom Grad 3 bezüglich $t_0, \ldots, t_k$, für die
$$s(t_0) = w_0,\ s(t_k) = w_k \text{ und}$$
$$s''(t_i) = \gamma_i\ ,\ i = 0, \ldots, k,$$
gilt.

b) Berechnen Sie zu

$$t_i := 1 + \frac{i}{100}\ ,\ i = 0, \ldots, 100,$$
$$w_0 := 0,\ w_{100} := \ln 4,$$
$$\gamma_i := t_i^{-1},\ i = 0, \ldots, 100,$$

die Werte w_i und $(w_i - t_i \ln t_i)$ für $i = 1, \ldots, 99$.
Warum ist zu erwarten, daß s im vorliegenden Fall eine Näherung für die in Aufgabe 1c) gesuchte Funktion u ist?
Ist zu erwarten, daß sie besser ist als die in Aufgabe 2 berechnete Näherung?
Schätzen Sie $|s(t) - u(t)|$ für jedes $t \in [1, 2]$ ab. Benutzen Sie dazu eine Abschätzung der Form

$$\left| s''(t) - \frac{1}{t} \right| \le c \quad \forall\, t \in [t_0, t_k] .$$

Aufgabe 4:

Zu $t_0, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < \ldots < t_k$ sei

$$K := \{\emptyset, \{t_0\}, \ldots, \{t_k\}, [t_0, t_1], \ldots, [t_{k-1}, t_k]\} .$$

Zeigen Sie, daß für gerades k mit

$$l_i : S_2(K, \mathbb{R}) \ni s \longmapsto s(t_{2i}) \in \mathbb{R} \text{ und}$$
$$\tilde{l}_i : S_2(K, \mathbb{R}) \ni s \longmapsto s'(t_{2i}) \in \mathbb{R}\ ,\ i = 0, \ldots, \frac{k}{2},$$

$\mathfrak{b}' := \left(l_0, \ldots, l_{\frac{k}{2}}, \tilde{l}_0, \ldots, \tilde{l}_{\frac{k}{2}} \right)$ eine Basis von $S_2(K, \mathbb{R})^*$ ist.

Finden Sie eine Basis von $S_2(K, \mathbb{R})$, für die $\mathfrak{b}'$ die duale Basis ist.

Abgabetermin: Mittwoch, 30. Juni 1999, in der Vorlesung