BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Sommersemester 1999)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

Zeigen Sie: Die Aussage

„Es gibt einen n–dimensionalen S-Komplex K mit den Eigenschaften

a) $\overline{K} = \mathbb{R}^n$,
b) alle eindimensionalen Simplexe aus K haben die gleiche Länge."

ist richtig für $n = 1$ und $n = 2$, aber falsch für $n = 3$.

Aufgabe 2:

E, F seien endlichdimensionale reelle normierte Vektorräume. $\|\cdot\|$ bezeichne sowohl die Norm auf E, als auch die Norm auf F. $\mathcal{L}_\nu(E,F)$ sei der reelle Vektorraum der ν–linearen Abbildungen $E^\nu \to F$.

a) Zeigen Sie, daß für jedes $f \in \mathcal{L}_\nu(E,F)$

$$\|f\| := \max_{\substack{\|h_i\|\le 1 \\ i=1,\dots,\nu}} \|f(h_1,\dots,h_\nu)\|$$

existiert und daß

$$\mathcal{L}_\nu(E,F) \ni f \longmapsto \|f\| \in \mathbb{R}$$

eine Norm ist, für die gilt:

$$\|f(h_1,\dots,h_\nu)\| \le \|f\| \cdot \|h_1\| \cdots \|h_\nu\| \quad \forall\, f \in \mathcal{L}_\nu(E,F) \text{ und } (h_1,\dots,h_\nu) \in E^\nu.$$

b) Für alle $L \in \mathcal{L}^\nu(E,F)$ ist

$$\Phi(L) : E^\nu \ni (h_1,\dots,h_\nu) \longmapsto L(h_1)\dots(h_\nu) \in F$$

offenbar in $\mathcal{L}_\nu(E,F)$.

Zeigen Sie, daß Φ eine bijektive lineare und normtreue Abbildung von $\mathcal{L}^\nu(E,F)$ auf $\mathcal{L}_\nu(E,F)$ ist.

c) Mit einem symmetrischen $f \in \mathcal{L}_\nu(E,F)$ sei

$$\varphi : E \ni x \longmapsto f(x,\dots,x) \in F\,.$$

Bestimmen Sie für alle $x_0 \in E$

$$D\varphi(x_0) \ (\in \mathcal{L}(E,F)) \text{ und } D^2\varphi(x_0) \ \left(\in \mathcal{L}^2(E,F)\right).$$

Zeigen Sie, daß $\Phi\left(D^2\varphi(x_0)\right)$ symmetrisch ist.

Hinweis:

$$f(x_0+h,\dots,x_0+h) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} f(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{i-\text{mal}},\underbrace{h,\dots,h}_{(\nu-i)-\text{mal}})$$

Aufgabe 3:

Zu $t_0, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < \ldots < t_k$ und $y_0, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^m$ bezeichne

$$s : [t_0, t_k] \to \mathbb{R}^m$$

die eindeutig bestimmte Spline-Funktion vom Grad 1 bezüglich $t_0, \ldots, t_k$, für die

$$s(t_i) = y_i,\ i = 0, \ldots, k,$$

gilt.

Zeigen Sie, daß für alle $t, t' \in [t_0, t_k]$ mit $t \neq t'$ gilt:

$$\frac{1}{t - t'} \left(s(t) - s(t')\right) \in \operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{k} \left\{ \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(y_i - y_{i-1}\right) \right\}.$$

Aufgabe 4:

Es seien $t_0, t_1, \alpha, \beta, w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < t_1$ und $\alpha \leq \beta$.

Unter welchen Bedingungen (an $t_0, t_1, \alpha, \beta, w_0, w_1$) gibt es

a) (wenigstens) eine differenzierbare Funktion $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t_0) = w_0,\ f(t_1) = w_1$ und

$$f'([t_0, t_1]) \subset [\alpha, \beta] \ ?$$

b) (wenigstens) eine Funktion $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t_0) = w_0,\ f(t_1) = w_1$ und

$$\frac{f(t) - f(t')}{t - t'} \in [\alpha, \beta] \quad \forall\, t, t' \in [t_0, t_1] \text{ mit } t \neq t' \ ?$$

Aufgabe 5:

Stellen Sie fest, ob es zu beliebig vorgegebenen

$$\begin{aligned} &t_0, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \text{ mit } t_0 < \ldots < t_k \text{ und} \\ &w_0, w_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

stets genau eine Spline-Funktion

$$s : [t_0, t_k] \to \mathbb{R}$$

vom Grad 2 bezüglich $t_0, \ldots, t_k$ gibt, für die

$$\begin{aligned} &s(t_0) = w_0,\ s(t_k) = w_k \text{ und} \\ &s''(t) = \gamma_i \quad \forall\, t \in]t_{i-1}, t_i[\,,\ i = 1, \ldots, k, \end{aligned}$$

gilt.

Abgabetermin: Freitag, 19. Juni 1999, in der Vorlesung